

Zadania z Funkcji Analitycznych - 4

1. Obliczyć całkę

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2},$$

gdzie γ to krzywa zamknięta łącząca punkty (w tej kolejności): $1, -1+i, 2i, -1+2i, 1+i, -1-i, 1-2i, -1+3i, 1$.

2. Obliczyć całkę

$$\int_E \frac{e^z \cos z}{(z^2+4) \sin z} dz,$$

gdzie $E = \{z = x + iy : x^2 + 4(y-2)^2 = 4\}$.

3. Udowodnić, że jeśli u jest funkcją harmoniczną w kole jednostkowym, to dla $0 < r < 1$ zachodzi wzór

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

4. (i) Dana jest ograniczona funkcja analityczna $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dla ustalonych $a, b \in \mathbb{C}$, zbadać zachowanie całki

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{(z-a)(z-b)}$$

przy $R \rightarrow \infty$ i wywnioskować, że f musi być funkcją stałą.

(ii) Wykazać, że każda ograniczona funkcja harmoniczna u na \mathbb{R}^2 jest stała.

5. Dowieść, że funkcja harmoniczna u określona na obszarze jednospójnym posiada tam funkcję sprzężoną.

Wskazówka: Zbadać funkcję analityczną $f(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)$.