Zadania z Funkcji Analitycznych - 3

1. Obliczyć następujące całki krzywoliniowe:

a) $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z$, gdzie γ to dodatnio zorientowany łuk o długości $\pi/2$, łączący 1 oraz i.

b) $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z$, gdzie γ to odcinek łączący 1 oraz i (zaczynający się w 1).

c) $\int_\Delta \mathfrak{Re}z\mathrm{d}z$, gdzie Δ to dodatnio zorientowany trójkąt o wierzchołkach 0, 1 oraz i.

d) $\int_\gamma \frac{1}{z^2+1}\mathrm{d}z$, gdzie γ to dodatnio zorientowany trójkąt o wierzchołkach -1, 1 oraz $2i$.

2. Dowieść, że funkcja $f(z) = 1/(z-a)$ ($a \in \mathbb{C}$ ustalone) nie ma funkcji pierwotnej na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, natomiast dla dowolnej półprostej ℓ wychodzącej z a, f ma funkcję pierwotną na $\mathbb{C} \setminus \ell$.

3. (i) Obliczyć całkę

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)(z-b)},$$

gdzie γ jest krzywą zamkniętą, bez samoprzecięć, taką, że a, b leżą w ograniczonym obszarze przez nią wyznaczonym.

(ii) Obliczyć całkę

$$\int_{|z|=10} \frac{z^2+9}{(z^2+1)(z^2+2)}\mathrm{d}z.$$

4. Ciągła funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest różniczkowalna w sensie rzeczywistym w punkcie z_0. Dowieść, że f jest różniczkowalna w sensie analitycznym w punkcie z_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int_{|z|=r} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

5. Dana jest funkcja analityczna na zbiorze D zawierającym odcinek $[u, v]$. Dowieść, że $(f(u) - f(v))/(u - v)$ jest elementem uwypuklenia zbioru $\{f'(z) : z \in [u, v]\}$. Wywnioskować stąd, że funkcja $f(z) = z+e^z$ jest różnowartościowa na półpłaszczyźnie $\mathfrak{Re}\, z < 0$.

6. Obliczyć całkę $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ dla $t \in \mathbb{R}$.

7. Obliczyć całkę $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$