Zadania z Funkcji Analitycznych - 2

1. Dowieść, że dla dowolnej liczby zespolonej z zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

2. Wyznaczyć obraz

a) pasa $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}\, z \in (0,\pi)\}$ przy przekształceniu $f(z) = e^z$.

b) pasa $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Re}\, z \geq 0,\ \mathfrak{Im}\, z \in (0,\pi)\}$ przy przekształceniu $f(z) = \cosh z$.

3. Wyznaczyć wszystkie punkty $z \in \mathbb{C}$, w których funkcja $f(z) = z|z|^2$ jest różniczkowalna.

4. Czy funkcja a) $u(x,y) = x^2+y^2$, b) $u(x,y) = x^3-3xy^2-x^2+y^2$ jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji analitycznej na $\mathbb{C}$? Czy jest częścią urojoną pewnej funkcji analitycznej? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, podać przykład odpowiedniej funkcji analitycznej.

5. Funkcje holomorficzne f, g zadane na kole jednostkowym $D \subset \mathbb{C}$ spełniają równość $\mathfrak{Re}\, f = \mathfrak{Im}\, g$. Dowieść, że $f = -i(g+a)$ dla pewnej liczby rzeczywistej a.

6. Funkcja analityczna $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ma tę własność, że $f+f'$ przyjmuje wyłącznie wartości rzeczywiste. Wyznaczyć f.

7. Dowieść, że funkcja $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $u(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ jest harmoniczna. Wykazać, że nie istnieje funkcja harmoniczna $v : \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ sprzężona z u, natomiast taka funkcja istnieje na $\mathbb{R}^2$ z wyrzuconą dowolną półprostą wychodzącą z 0.

8. Wyznaczyć wszystkie funkcje $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ klasy C^2 takie, że funkcja $u(x,y) = x\varphi(x^2+y^2)$ jest harmoniczna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

9. Dowieść, że jeśli u jest funkcją harmoniczną w obszarze D, to następujące warunki są równoważne:

(i) istnieje funkcja v harmonicznie sprzężona do u w D,

(ii) funkcja analityczna $f(z) = u_x - iu_y$ posiada funkcję pierwotną (tzn. istnieje funkcja analityczna $F : D \to \mathbb{C}$ taka, że $F' = f$).