Zadania z Funkcji analitycznych - 13

1. Wyznaczyć obraz

a) dysku jednostkowego z wyjętym odcinkiem $(-1, 0]$ przy przekształceniu $f(z) = \operatorname{Log} z$.

b) płaszczyzny $\mathbb{C}$ z wyjęym odcinkiem $[\alpha, \beta]$, $(\alpha,\ \beta \in \mathbb{C})$ przy przekształceniu $f(z) = \operatorname{Log} \frac{z-\alpha}{z-\beta}$.

c) dysku jednostkowego przy przekształceniu $f(z) = \frac{2i}{\pi} \operatorname{Log} \frac{iz-1}{z-i} - 1$.

2. Wykazać, że funkcja $\operatorname{Log}(\cos z)$ jest holomorficzna na pewnym kole o środku w 0. Wyznaczyć maksymalny promień takiego koła oraz trzy pierwsze wyrazy rozwinięcia Taylora.

3. Rozwinąć funkcje $f(z) = \operatorname{Log} \frac{z^2}{z^2-1}$ w szereg Laurenta w pierścieniu $P(0, 1, \infty)$.

4. Wykazać, że istnieje funkcja holomorficzna $f : \mathbb{C} \setminus [0, 1] \to \mathbb{C}$ taka, że $f^2(z) = z(1-z)$.

5. Funkcja $f : D \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna i ciągła na $\overline{D}$ (D oznacza dysk jednostkowy). Ponadto, $|f(z)| > 1$ dla $z \in \partial D$ oraz $f(0) < 1$. Dowieść, że f ma miejsce zerowe w D.

6. Obliczyć $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.