Zadania z Funkcji Analitycznych - 12

We wszystkich zadaniach poniżej, D oznacza otwarty dysk jednostkowy.

1. Dana jest funkcja holomorficzna $f : D \to D$. Dowieść, że jeśli $\sup_{z \in D} |f(z)| = |f(z_0)|$ dla pewnego $z_0 \in D$, to f jest funkcją stałą.

2. Wykazać, że jeśli $f : D \to D$ jest funkcją holomorficzną taką, że $f(0) = 0$, to albo $|f(z)| < |z|$ dla wszystkich $z \in D \setminus \{0\}$, albo $f(z) \equiv e^{i\alpha} z$ dla pewnej liczby rzeczywistej α.

3. Wykazać, że jeśli $f : D \to D$ jest funkcją analityczną, to

$$\left| \frac{f(z) - f(0)}{z} \right| \leq |1 - \overline{f(0)} f(z)|$$

dla wszystkich $z \in D \setminus \{0\}$.

4. Wykazać, że jeśli $f : D \to D$ jest funkcją holomorficzną, to albo $|f'(0)| < 1$, albo $f(z) \equiv e^{i\alpha} z$ dla pewnej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Funkcja $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \to D$ jest holomorficzna i spełnia warunek $\lim_{|z| \to \infty} f(z) = 0$. Udowodnić, że albo $|zf(z)| < 1$ dla wszystkich z o module większym niż 1, albo $zf(z) \equiv e^{i\alpha}$ dla pewnej liczby rzeczywistej α.

6. Wyznaczyć obraz pasa $\{z \in \mathbb{C} : |\mathfrak{Re} z| < 1\}$ przy przekształceniu $f(z) = \sqrt{z}$ (przy doborze dowolnej, ustalonej gałęzi pierwiastka).