Zadania z Funkcji Analitycznych - 10

1. Wykazać tożsamość

$$\frac{\sin 3z}{\sin z} = -\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(n\pi+z)^2}\right)$$

dla z niebędących wielokrotnością π.

2. Korzystając z tożsamości

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}, \qquad z \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,$$

udowodnić, że

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{2n+1}\right)\left(1+\frac{z}{2n}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}(z(1-z))^{-1}}{\Gamma(z/2)\Gamma((1-z)/2)}.$$

3. Wykazać, że $\zeta(z)\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-nt}\mathrm{d}t$ dla $\mathfrak{Re}\, z > 1$.

4. Rozważając całkę

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{t^{z-1}}{e^{-t}-1}\mathrm{d}t,$$

gdzie γ jest pierścieniem $P(0,r,R)$ rozciętym wzdłuż niedodatniej półprostej, a następnie zbiegając z $r \to 0$, $R \to \infty$, wykazać, że

$$\zeta(z) = \frac{(2\pi)^z}{2\Gamma(z)\cos(\pi z/2)}\zeta(1-z).$$