

## Zadania z Funkcji Analitycznych - 1

1. Wyznaczyć najmniejszą taką liczbę całkowitą dodatnią  $n$ , dla której  $(\sqrt{3} - i)^n$  jest liczbą rzeczywistą.

2. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające równanie

$$(z + 2)^4 + (z - 1)^4 = 0.$$

3. Znaleźć wzór na  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n + 1)x$ .

4. Znaleźć wzór na sumę

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{3k}.$$

5. Na trójkącie równobocznym  $ABC$  opisano okrąg, i na krótszym łuku  $AB$  tego okręgu wybrano punkt  $D$ . Dowieść, że  $|AD| + |BD| = |CD|$ .

6. Na bokach  $ABC$  trójkąta, na zewnątrz tego trójkąta, zbudowano trójkąty równoboczne  $BCD$ ,  $CAE$ ,  $ABF$ . Udowodnić, że jeśli trójkąt  $DEF$  jest równoboczny, to  $ABC$  też jest równoboczny.

7. Wyznaczyć wszystkie pary  $(n, r)$ , gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą dodatnią,  $r$  zaś liczbą rzeczywistą, dla których wielomian  $W(x) = (x + 1)^n - r$  dzieli się przez  $2x^2 + 2x + 1$ .

8. Liczby rzeczywiste  $a, b, u, v$  spełniają warunek  $av - bu = 1$ . Dowieść, że

$$a^2 + b^2 + u^2 + v^2 + au + bv \geq \sqrt{3}.$$

9. Dany jest ciąg  $(z_n)_{n \geq 0}$  liczb zespolonych, przy czym  $\Re z_n \geq 0$  dla wszystkich  $n$ . Dowieść, że jeśli szeregi  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  i  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n^2$  są zbieżne, to  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2$  też jest zbieżny.

10. Zbadać zbieżność iloczynu

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right).$$