

RP WNE 2011/2012, IX seria

1. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}((X, Y) = (k, \ell)) = \frac{4k\ell}{n^2(n+1)^2}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n.$$

- Obliczyć $\mathbb{P}(X + Y = n + 1)$.
- Wyznaczyć rozkład zmiennej X .
- Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$.
- Czy zmienne X, Y są niezależne?

2. Zmienne X, Y są całkowalne z kwadratem. Macierz kowariancji zmiennej (X, Y) wynosi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych $X + 3Y, 2X - Y$.

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = xe^{-y}1_{\{0 \leq x \leq y\}}.$$

- Wyznaczyć rozkład zmiennej X .
- Obliczyć $\mathbb{E}e^{Y/2}$.
- Obliczyć $\mathbb{P}(\min\{X, Y\} \leq 1)$.
- Wyznaczyć rozkład zmiennej Y/X .

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

- Obliczyć wartość dystrybuanty zmiennej (X, Y) w punkcie $(0, 0)$.
- Wyznaczyć gęstości zmiennych X i Y . Czy X i Y mają ten sam rozkład?
- Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$. Czy X, Y są niezależne?
- Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.
- Obliczyć $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 \leq \frac{1}{2})$.
- Obliczyć $\mathbb{E}(e^X \cdot Y)$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

- Podać definicję dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .
- Podać definicję współczynnika korelacji zmiennych X, Y .
- Podać definicję macierzy kowariancji zmiennej (X, Y) .
- Zmienna losowa ma rozkład z gęstością $g(x, y) = 1_{\{0 \leq y \leq 1 - |x|\}}$.
 - Podać wartość dystrybuanty zmiennej (X, Y) w punkcie $(1, \frac{1}{2})$.
 - Wyznaczyć gęstości zmiennych X i Y .
 - Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$. Czy zmienne X, Y są niezależne?
 - Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y - X$.
- Rzucamy prawidłową kostką aż do wypadnięcia szóstki. Niech X oznacza łączną liczbę rzutów, a Y - liczbę wyrzuconych piątek.
 - Wyznaczyć rozkład (X, Y) .
 - Czy zmienne X, Y są niezależne?