RP WNE 2011/2012, VIII seria

1. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{2k}{n(n+1)}, \qquad k=1,\,2,\,\ldots,\,n.$$

Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennych X oraz $Y=2X+5$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}1_{(-2,2)}(x).$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Var}X$, współczynnik asymetrii X oraz kurtozę X.

3. Rozważmy rynek akcji z notowaniami ciągłymi. Prawdopodobieństwo, że kurs akcji pewnej spółki zanotuje (pierwszy) spadek w czasie niewiększym niż t od otwarcia sesji wynosi

$$p(t)=\begin{cases}1-t^{-4} & \text{dla } t\geq 1,\\ 0 & \text{dla } t<1.\end{cases}$$

Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję czasu w którym kurs spółki wzrasta. Dla jakich p istnieje skończony p-ty moment tej zmiennej losowej?

4. Grupę 10 osób w wieku między 25 a 50 lat zapytano ile średnio minut zajmuje im dojazd do miejsca pracy. Uzyskano odpowiedzi: 40, 20, 20, 30, 30, 10, 60, 30, 60, 90. Wyznaczyć rozkład empiryczny μ związany z tą próbką i obliczyć jego dystrybuantę w punkcie 50. Ile wynosi średnia empiryczna próbki?

5. Rzucono dwa razy prawidłową kostką. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych szóstek, a Y - liczbę wyrzuconych piątek. Na jakim zbiorze jest skoncentrowana zmienna (X,Y)? Obliczyć $\mathbb{P}(X>Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład z gęstością $g(x,y)=Cx1_{\{0\leq x\leq 1,\,0\leq y\leq 1\}}$. Obliczyć C, $\mathbb{P}(X+Y<1)$ oraz $\mathbb{P}(Y\leq 1/2)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych X oraz Y.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Podać definicję p-tego momentu absolutnego zmiennej X.

2. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x)=\frac{1}{9}|x|1_{[-3,3]}(x)$. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych X, $Y=3-5X$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$. Wyznaczyć wariancję zmiennej $2X^5-1$, kurtozę zmiennej X oraz drugi moment zmiennej X^2-1.

4. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X=k)=1/21, \qquad k=-10,\,-9,\,\ldots,\,10.$$

Wyznaczyć wariancję zmiennej X.

5. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X=-2)=1/2, \quad \mathbb{P}(X=3)=1/3, \quad \mathbb{P}(X=a)=1/6.$$

Wyznaczyć taką liczbę a, by zmienna X miała najmniejszą możliwą wariancję.

6. W celu wstępnego zbadania rozkładu liczby wypadków na pewnym ruchliwym skrzyżowaniu, zgromadzono dane z ubiegłych lat: w latach 2000, 2001, ..., 2010 liczby te wynosiły odpowiednio 10, 13, 7, 18, 15, 12, 20, 24, 19, 10, 21. Wyznaczyć wartość dystrybuanty empirycznej tej próbki w punkcie 15, medianę i pierwszy decyl rozkładu empirycznego.

7. Rzucono trzy razy prawidłową monetą. Niech X oznacza liczbę orłów w pierwszych dwóch rzutach, a Y - łączną liczbę orłów. Wyznaczyć $\mathbb{P}(X=Y)$ oraz $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

8. Zmienna (X,Y) ma rozkład z gęstością $g(x,y)=Cxy1_{\{(x,y):0\leq x\leq y\leq 1\}}$. Obliczyć C oraz $\mathbb{P}(X\geq 1/2)$.