RP WNE 2011/2012, VI + VII seria

Uwaga: ze względu na inną liczbę zajęć środowych i piątkowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w piątki

1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) e^X, b) X^2. Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

2. Zmienna X ma rozkład Poissona z parametrem 3. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}(2X+1)$, $\mathbb{E}X^2$ i $\mathbb{E}2^X$.

3. Zmienna X ma rozkład o gęstości $g(x) = \frac{\sin x}{2} 1_{[0,\pi]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}(3-X)$, $\mathbb{E}\cos X$.

4. Dochód pracownika jest zmienną losową o rozkładzie zadanym przez dystrybuantę

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 200, \\ ct^2(1500-t) & \text{dla } 200 \le t < 1000, \\ 1 & \text{dla } t \ge 1000, \end{cases}$$

gdzie $c = 2 \cdot 10^{-9}$. Wyznaczyć średni dochód pracownika. Obliczyć medianę oraz pierwszy decyl (kwantyl rzędu 1/10) rozkładu dochodu.

5. Liczba wypadków danego dnia w pewnym mieście ma rozkład Poissona z parametrem 10 jeśli jest to poniedziałek – piątek oraz rozkład Poissona z parametrem 3 jeśli jest to sobota lub niedziela. Niech X oznacza łączną liczbę wypadków w ustalonym tygodniu. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

6. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo jednym z trzech kolorów: białym, czarnym lub czerwonym (kolory dla różnych odcinków wybieramy niezależnie). Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

7. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wypadnie każda możliwa liczba oczek. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Podać definicję kwantyla rzędu ρ rozkładu zmiennej losowej X.

2. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 10\}$, zadany przez

$$\mathbb{P}(X=1) = 1/2, \qquad \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \ldots = \mathbb{P}(X=10) = p.$$

Obliczyć p, $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X+5)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{6}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X-1)$.

4. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 2x^{-3} 1_{[1,\infty)}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}(1-X)$ oraz $\mathbb{E}X^3 e^{-X}$.

5. Zmienna X ma standardowy rozkład normalny. Obliczyć $\mathbb{E}X(X+1)$, $\mathbb{E}e^{2X}$ i $\mathbb{E}e^{3X^2/8}$.

6. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 49\}$ losujemy 6 liczb bez zwracania. Niech X oznacza liczbę nieparzystych numerów wśród wylosowanych. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

7. W urnie znajduje się 50 białych kul. Losujemy ze zwracaniem po jednej kuli, przy czym wyciągniętą kulę malujemy na czerwono, jeśli jest biała. Niech X oznacza liczbę czerwonych kul w urnie po 20 losowaniach. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

8. Dysponujemy trzema bezpiecznikami typu I oraz dwoma bezpiecznikami typu II. Czas bezawaryjnej pracy bezpiecznika typu I ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, a czas pracy bezpiecznika typu 2 - rozkład wykładniczy z parametrem 1/2. Urządzenie funkcjonuje sprawnie jeśli zamontowany w nim bezpiecznik jest nieuszkodzony; w razie awarii, przepalony bezpiecznik wymieniamy na nowy. Niech X oznacza łączny czas pracy urządzenia aż do wyczerpania zapasu bezpieczników. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

9. Dziesięć dziewczynek oraz dziesięciu chłopców ustawia się losowo w pary. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby par złożonych z samych dziewczynek.