

1. Dystrybuanta F zmiennej losowej X zadana jest następująco:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -2, \\ \frac{1}{3} & \text{jeśli } t \in [-2, 0), \\ \frac{1}{3}t + 1/2 & \text{jeśli } t \in [0, 1), \\ \frac{5}{6} & \text{jeśli } t \in [1, 5), \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 5. \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{P}(X \in (3, 7))$, $\mathbb{P}(X \in [-2, -1])$, $\mathbb{P}(X \in [-2, -1))$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$. Czy X ma rozkład dyskretny? Czy X ma rozkład ciągły?

2. Każdego dnia do ustalonej osoby dzwoni albo jej kolega (z prawdopodobieństwem $1/3$), albo jej koleżanka (z prawdopodobieństwem $2/3$). Czas trwania rozmowy z kolegą (liczony w minutach) jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[1, 5]$; w przypadku gdy dzwoni koleżanka, jest to zmienna o rozkładzie wykładniczym z parametrem $1/5$. Niech X oznacza długość rozmowy, która się odbyła ustalonego dnia.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz jego gęstość.

b) Załóżmy, że $X > 4$ (tzn. rozmowa trwała dłużej niż 4 minuty). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dzwoniła koleżanka?

3. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{3}{8}x^2 1_{(0,2)}(x)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) $\max\{X, 1\}$, b) X^{-2} . Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

4. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład $Y = -\ln X$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego, tzn. rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

a) Wyznaczyć dystrybuantę X .

b) Dla jakiej wartości t mamy $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq t) = 7/12$?

c) Wyznaczyć rozkład zmiennej $1/X$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Jakie warunki muszą spełniać parametry $a, b \in \mathbb{R}$, by funkcja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, zadana wzorem

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 1, \\ a + \frac{b}{t} & \text{jeśli } t \geq 1, \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa? Co dodatkowo trzeba założyć, aby taki rozkład był ciągły (tzn. miał gęstość)?

2. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego $B(n, p)$. Sprawdzić, że zmienna $n - X$ ma rozkład Bernoulliego $B(n, 1 - p)$.

3. Z koła o promieniu R losujemy punkt. Niech X oznacza odległość tego punktu od środka koła. Wyznaczyć rozkład zmiennej X^2 .

4. Czas życia urządzenia w fabryce (zaokrąglony do pełnych dni) ma rozkład geometryczny z parametrem $p \in (0, 1)$ (zadany przez $\mu(\{k\}) = (1 - p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \dots$). Wiadomo, że po dziesięciu dniach pracy urządzenie jest wciąż sprawne; jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ulegnie ono awarii w przeciągu kolejnych pięciu dni?

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{2}x 1_{[0,2]}(x)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min\{X - 1, 0\}$. Czy ma on gęstość?