RP WNE 2011/2012, XV seria

1. Macierz przejścia jednorodnego łańcucha Markowa $(X_n)_{n\geq 0}$ na przestrzeni $E = \{1,2,3,4\}$ dana jest następująco:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Jakie jest prawdopodobieństwo dojścia w dwóch krokach ze stanu 1 do stanu 2? (tzn. policzyć $p_{12}(2)$).
b) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n. obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.
c) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n. obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.
d) Wyznaczyć rozkład stacjonarny. Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?
e) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że $X_{10000} = 1$.

2. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

3. Po wierzchołkach pięciokąta ABCDE porusza się pionek. W chwili początkowej znajduje się w punkcie A, a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z prawdopodobieństwem 1/2 do jednego z sąsiednich wierzchołków. Obliczyć
a) prawdopodobieństwo, że pionek powróci do punktu A przed dotarciem do punktu C,
b) wartość oczekiwaną liczby ruchów, jakie wykona pionek przed powrotem do punktu A.

4. Na pewnym skrzyżowaniu, odstępy czasu (liczone w dniach) między kolejnymi wypadkami są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przez pierwsze cztery dni będzie miało miejsce co najmniej siedem wypadków?

5. Zmienne losowe X, Y, Z, T są niezależne, przy czym X ma standardowy rozkład normalny, Y ma rozkład $N(3,4)$, Z ma rozkład $\chi^2(3)$, a T ma rozkład $\chi^2(6)$.
a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $A = X^2 + (Y-3)^2/4 + Z$.
b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $B = 3(X^2 + (Y-3)^2/4)/T$.
c) Wyznaczyć rozkład zmiennej $C = (Y-3)/\sqrt{Z + X^2}$.
d) Obliczyć prawdopodobieństwo, że $X < \sqrt{T}$.
e) Obliczyć prawdopodobieństwo, że $(Y-3)^2 < Z + T$.

6. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu $\Gamma(a,b)$.

Przykładowe dalsze zagadnienia

1. Macierz przejścia jednorodnego łańcucha Markowa $(X_n)_{n\geq 0}$ na przestrzeni $E=\{1,2,3\}$ dana jest następująco:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że startując ze stanu 2, po dwóch krokach łańcuch będzie znów w stanie 2?
b) Zakładając, że $X_0=1$ p.n. obliczyć prawdopodobieństwo tego, że łańcuch powróci do 1 przed dojściem do stanu 3.
c) Zakładając, że $X_0=3$ p.n. obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 1.
d) Wyznaczyć rozkład stacjonarny. Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?
e) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że $X_{10000}=1$.

2. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy serię 3 orłów. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby przeprowadzonych rzutów.

3. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład chi kwadrat z n stopniami swobody, a Y ma rozkład $\Gamma(1/2,1/2)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X+Y$ (**uwaga**: nie potrzeba tu żadnych rachunków).

4. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, Y ma rozkład wykładniczy z parametrem 2, a Z ma rozkład $\Gamma(5,2)$. Jaki rozkład ma zmienna $\frac{1}{2}X+Y+Z$?

5. Obserwujemy w ciągu 100 kolejnych dni ceny akcji pewnej spółki. Niech X_i oznacza względny wzrost ceny w ciągu i-tego dnia, $i=1,2,\ldots,100$. Zakładamy, że zmienne X_1, X_2, …, X_{100} są niezależne i mają rozkład log-normalny $L(0.01,0.1)$. Jaki rozkład ma zmienna zdefiniowana jako względny przyrost ceny w ciągu 100 dni?

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład Pareto z parametrami a, b. Wyznaczyć rozkład zmiennej $\min\{X,Y\}$.

7. Elementy A i B wchodzą w skład pewnego urządzenia i są niezbędne do jego prawidłowego funkcjonowania. Czasy "życia" elementów A, B (liczone w latach) są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Weilbulla z parametrami 3/2, 1 oraz 3/2, 2, odpowiednio. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że urządzenie będzie sprawne po trzech latach.