RP WNE 2011/2012, XIII seria

Uwaga: ze względu na inną liczbę zajęć środowych i piątkowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy

1. Dokonujemy stukrotnego pomiaru pewnej wielkości fizycznej. Błędy związane z kolejnymi pomiarami są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej 0 i wariancji $0,1$. Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować z góry prawdopodobieństwo tego, że wartość bezwzględna sumarycznego błędu przekroczy 10.

2. Korzystając z nierówności Bernsteina, oszacować z góry prawdopodobieństwo tego, że przy trzystukrotnym rzucie prawidłową kostką szóstka wypadnie co najmniej 60 razy.

3. Obserwujemy w ciągu 100 kolejnych dni ceny akcji pewnej spółki. Niech X_i oznacza względny wzrost ceny w ciągu i-tego dnia (porównujemy kursy zamknięcia z i-tego oraz $i-1$-szego dnia), $i = 1, 2, \ldots, 100$. Przykładowo, równość $X_{54} = -0,01$ oznacza, iż w stosunku do ceny zamknięcia z 53 dnia, cena pod koniec 54 dnia zmalała o 1%. Zakładamy, że zmienne X_1, X_2, $\ldots$, X_{100} są niezależne i mają średnią $0,01\%$. Korzystając z nierówności Czebyszewa, oszacować z góry prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 100 dni cena akcji wzrośnie ponad dwukrotnie.

4. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są nieskorelowane, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1/n, 1/n]$. Czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa?

5. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są nieskorelowane, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = 1/2$. Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

6. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Zbadać zbieżność p.n. ciągu

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n + 3}{n + 31}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

7. Z odcinka $[0, 3]$ losujemy w sposób niezależny kolejno punkty A_1, A_2, $\ldots$. Dla każdego n, niech S_n oznacza liczbę tych punktów spośród A_1, A_2, $\ldots$, A_n, które wpadły do odcinka $[0, 1]$. Sprawdzić, że $\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{3}$ p.n.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Sformułować nierówność Czebyszewa i nierówność Bernsteina.

2. Rzucono 100 razy prawidłową monetą. Korzystając z nierówności Bernsteina, oszacować prawdopodobieństwo tego, że orzeł pojawi się w ponad 60% rzutów.

3. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$ są nieskorelowane, przy czym dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = 1/(2n^2)$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n^2$. Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

4. Zmienne X_1, X_2, $\ldots$ są niezależne i mają rozkład $\mathcal{U}([0, 1])$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.