RP WNE 2011/2012, XIII+XIV seria

Uwaga: ze względu na inną liczbę zajęć środowych i piątkowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w piątki

1. Obserwujemy w ciągu 100 kolejnych dni ceny akcji pewnej spółki. Niech X_i oznacza względny wzrost ceny w ciągu i-tego dnia, $i = 1, 2, \ldots, 100$ (przykładowo, równość $X_{54} = -0,01$ oznacza, iż w ciągu 54 dnia cena zmalała o 1%). Zakładamy, że zmienne $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ są niezależne i mają średnią $0,01\%$. Korzystając z nierówności Czebyszewa, oszacować z góry prawdopodobieństwo tego, że w ciągu 100 dni cena akcji wzrośnie ponad dwukrotnie.

2. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są nieskorelowane, i dla $n \geq 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1/n, 1/n]$. Zbadać zbieżność według prawdopodobieństwa ciągu

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Zbadać zbieżność p.n. ciągu

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n + 3}{n + 31}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

4. Rzucono kostką 200 razy. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że suma oczek będzie zawarta w przedziale $(700, 750)$?

5. Rzucamy symetryczną monetą aż do chwili gdy wyrzucimy 1000 orłów. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo, że rzucimy więcej niż 2100 razy?

6. W pewnym doświadczeniu prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A wynosi $0,7$. Ile razy trzeba powtórzyć to doświadczenie, żeby z prawdopodobieństwem $0,9$ częstość zajścia zdarzenia A nie różniła się od $0,7$ o więcej niż $0,1$? Czy można coś powiedzieć o potrzebnej liczbie powtórzeń, jeśli nie znamy prawdopodobieństwa zdarzenia A?

7. Z bankomatu korzysta dziennie 100 osób. Kwoty podejmowanej przez poszczególnych klientów gotówki są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 300 PLN i odchyleniu standardowym 150. Znaleźć przedział (możliwie krótki), w którym z prawdopodobieństwem $\geq 0,95$ zawierać się będzie całkowita kwota dziennej wypłaty.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Rzucono 100 razy monetą. Korzystając z nierówności Bernsteina, oszacować prawdopodobieństwo tego, że orzeł pojawi się w ponad 60% rzutów.

2. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład $\mathcal{U}([0, 1])$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.

3. Z odcinka $[0, 3]$ losujemy w sposób niezależny kolejno punkty $A_1, A_2, \ldots$. Dla każdego n, niech S_n oznacza liczbę tych punktów spośród $A_1, A_2, \ldots, A_n$, które wpadły do odcinka $[0, 1]$. Sprawdzić, że $\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{3}$ p.n.

4. Z urny zawierającej pięć kul ponumerowanych liczbami od 1 do 5 losujemy 500 razy po jednej kuli ze zwracaniem. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że kulę z numerem 1 wylosujemy mniej niż 80 razy?

5. Rzucamy symetryczną kostką aż suma oczek przekroczy 350. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że rzucimy więcej niż 120 razy?

6. Dysponujemy dwiema prawidłowymi monetami i wykonujemy po 900 rzutów każdą z nich. Jakie jest przybliżone prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba orłów otrzymanych na pierwszej monecie różni się od łącznej liczby orłów na drugiej monecie o nie więcej niż 50?

7. Rzucamy monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest nieznane i wynosi p. Ile razy trzeba powtórzyć to doświadczenie, żeby z prawdopodobieństwem $\geq 0,95$ częstość wypadnięcia orła nie różniła się od p o więcej niż $0,05$?

8. Sumujemy 10 000 liczb, każdą zaokrągloną z dokładnością 10^{-3}. Błędy spowodowane przez zaokrąglenia są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(-10^{-3}/2, 10^{-3}/2)$. Znaleźć przedział (możliwie krótki), do którego z prawdopodobieństwem $\geq 0,95$ będzie należał błąd całkowity (tzn. po zsumowaniu).