

## RP WNE 2011/2012, XI seria

*Uwaga: ze względu na inną liczbę zajęć środowych i piątkowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy*

1. W urnie nr 1 znajdują się trzy kule ponumerowane liczbami 1, 2 i 3, a w urnie nr 2 - dwie kule, z numerami 1 i 2. Losujemy urnę, a z urny jedną kulę. Niech  $X$  oznacza numer wylosowanej urny, a  $Y$  - numer wylosowanej kuli. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

2. Rzucono dwa razy kostką i przez  $X, Y$  oznaczono liczby oczek w pierwszym i drugim rzucie. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$ ,  $\mathbb{E}(X + Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|X + Y)$ .

3. Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 10\}$  losujemy bez zwracania dwie liczby, mniejszą oznaczamy przez  $X$ , a większą przez  $Y$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(XY + X|X)$ .

4. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  oraz  $(0, 1)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$ ,  $\mathbb{E}(XY^2 + 3X^2Y - 1|X)$  oraz  $\mathbb{E}(\sin Y|X)$ .

5. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = e^{-x} 1_{\{0 \leq y \leq x\}}.$$

Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$ ,  $\mathbb{E}(XY|Y)$  oraz  $\mathbb{P}(X \geq 3|Y)$ .

6. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład normalny o średniej  $(0, 0)$  i macierzy kowariancji  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(XY|Y)$ .

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Wiadomo, że  $\mathbb{P}(Y = 1|X = 5) = 1/3$  oraz  $\mathbb{P}(Y = 5|X = 5) = 2/3$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X = 5)$  oraz  $\mathbb{E}(XY^2|X = 5)$ .

2. W urnie znajdują się dwie białe kule, z numerami 1 i 2, oraz trzy czarne kule, z numerami 1, 2 oraz 3. Z urny wyciągnięto bez zwracania dwie kule. Niech  $X$  oznacza niewiększy z wylosowanych numerów, a  $Y$  oznacza liczbę wylosowanych białych kul. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

3. Rzucono trzy razy monetą. Niech  $X$  oznacza łączną liczbę wypadniętych orłów oraz

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadł orzeł,} \\ 0 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadła reszka.} \end{cases}$$

Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(XY|X)$ .

4. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach  $(2, 0)$ ,  $(0, 1)$  oraz  $(-1, 0)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(X^2 + XY|Y)$ .

5. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = (x + y) 1_{\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}}.$$

Wyznaczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(\sin X + Y|Y)$ .

6. Zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne i mają standardowy rozkład normalny. Obliczyć  $\mathbb{E}(2X - Y|X + Y)$ .