

RP WNE 2011/2012, XI + XII seria

Uwaga: ze względu na inną liczbę zajęć środowych i piątkowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w piątki

1. Rzucono dwa razy kostką i przez X, Y oznaczono liczby oczek w pierwszym i drugim rzucie. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(X + Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|X + Y)$.

2. Zmiennie losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami μ i λ , odpowiednio. Obliczyć $\mathbb{P}(X = k|X + Y)$ (gdzie k jest ustaloną liczbą nieujemną) i $\mathbb{E}(X|X + Y)$.

3. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ oraz $(0, 1)$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(XY^2 + 3X^2Y - 1|X)$ oraz $\mathbb{E}(\sin Y|X)$.

4. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = e^{-x} 1_{\{0 \leq y \leq x\}}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(XY|Y)$ oraz $\mathbb{P}(X \geq 3|Y)$.

5. Rzucamy raz kostką, a następnie rzucamy nią tyle razy, ile oczek wypadło za pierwszym razem. Niech X oznacza sumę wszystkich liczb oczek (łącznie z pierwszym rzutem). Obliczyć $\mathbb{E}X$.

6. Miesięczne zużycie energii elektrycznej w pewnej fabryce ma rozkład jednostajny na przedziale $[200, 250]$. Przy zadanym zużyciu λ , ilość wyemitowanego dwutlenku węgla ma rozkład wykładniczy z parametrem $5 - \lambda/100$. Wyznaczyć rozkład (gęstość) ilości wyemitowanego dwutlenku węgla w ciągu danego miesiąca.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Wiadomo, że $\mathbb{P}(Y = 1|X = 5) = 1/3$ oraz $\mathbb{P}(Y = 5|X = 5) = 2/3$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X = 5)$ oraz $\mathbb{E}(XY^2|X = 5)$.

2. W urnie znajdują się dwie białe kule, z numerami 1 i 2, oraz trzy czarne kule, z numerami 1, 2 oraz 3. Z urny wyciągnięto bez zwracania dwie kule. Niech X oznacza niewiększy z wylosowanych numerów, a Y oznacza liczbę wylosowanych białych kul. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|Y)$.

3. Rzucono trzy razy monetą. Niech X oznacza łączną liczbę wypadniętych orłów oraz

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadł orzeł,} \\ 0 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadła reszka.} \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

4. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(2, 0)$, $(0, 1)$ oraz $(-1, 0)$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2 + XY|Y)$.

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = (x + y) 1_{\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X + Y|Y)$.

6. Rzucono raz kostką i raz monetą. Niech X oznacza liczbę wypadniętych oczek, pomnożoną przez 2 jeśli na monecie wypadł orzeł. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

7. Na odcinku $[0, 1]$ wybieramy losowo liczbę X (zgodnie z rozkładem jednostajnym), a następnie z odcinka $[0, X]$ wybieramy losowo liczbę Y (także zgodnie z rozkładem jednostajnym). Obliczyć $\mathbb{E}Y$.