

## RP WNE 2011/2012, X seria

1. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu wyrzucenia parzystej liczby oczek. Niech  $X$  oznacza liczbę wykonanych rzutów, a  $Y$  - liczbę oczek w ostatnim rzucie.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej  $(X, Y)$ .

b) Obliczyć  $\text{Cov}(X, Y)$ . Czy zmienne  $X, Y$  są niezależne?

2. Z talii 52 kart losujemy 5 kart a) ze zwracaniem, b) bez zwracania. Niech  $X$  oznacza liczbę pików wśród wyciągniętych kart. Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję  $X$ .

3. Zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne, przy czym  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, a  $Y$  ma rozkład z gęstością

$$g_Y(y) = ye^{-y}1_{[0, \infty)}(y).$$

Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej  $X + Y$ .

4. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład normalny o średniej  $(0, 0)$  i macierzy kowariancji

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Czy  $X, Y$  są niezależne?

b) Wyznaczyć gęstość zmiennej  $(X, Y)$ .

c) Jaki rozkład ma zmienna  $X + 2Y + 1$ ?

d) Wyznaczyć gęstość zmiennej  $(X + Y, Y)$ .

e) Dla jakiej wartości parametru  $a$ , zmienne  $X$  oraz  $X + aY$  są niezależne?

5. Porównano zatrudnienie w różnych szwalniach w pewnej strefie ekonomicznej. Zaobserwowano, iż liczba krawcowych zatrudnionych w poszczególnych firmach jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[100, 300]$ . Wynagrodzenie krawcowej zależy od firmy, i wynosi średnio 2400 PLN przy odchyleniu standardowym  $400\sqrt{3}$ . Stwierdzono, iż współczynnik korelacji wielkości zatrudnienia i poziomu wynagrodzenia w zbadanych firmach równy jest 0,6. Wyznaczyć najlepsze liniowe przybliżenie zależności między oferowanym wynagrodzeniem a liczbą osób podejmującą zatrudnienie w danej firmie.

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

1. Co to znaczy, że zmienne losowe są nieskorelowane?

2. Zmienne losowe  $X, Y, Z$  mają ten sam rozkład i spełniają równości  $\text{Var}(X + Y + Z) = 21$ ,  $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Z, X) = 1$ . Obliczyć  $\text{Var}X$  oraz  $\text{Var}(X + Y)$ .

3. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{2}\right).$$

Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej  $(X, Y)$ , rozkład zmiennej  $2X - Y + 2$  oraz rozstrzygnąć, czy zmienne  $X, X - Y$  są niezależne.

4. Zmienne losowe  $X, Y$  są niezależne i mają rozkłady jednostajne na odcinkach  $[0, 1]$  oraz  $[0, 2]$ , odpowiednio. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej  $X + Y$ .

5. Z kwadratu  $[0, 2] \times [0, 2]$  losujemy w sposób niezależny 20 punktów. Niech  $X$  oznacza liczbę tych punktów spośród wylosowanych, które należą do kwadratu  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej  $X$ .

6. Nadajnik wysyła sygnał  $X$ . Odbiornik odbiera sygnał  $Y = aX + Z$ , gdzie  $a > 0$  jest współczynnikiem wzmocnienia, zaś  $Z$  jest zakłóceniem. Wiadomo, że  $X, Z$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym  $\mathbb{E}X = m$ ,  $\text{Var} X = 1$ ,  $\mathbb{E}Z = 0$  oraz  $\text{Var} Z = \sigma^2$ . Wyznaczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych  $X, Y$  oraz regresję liniową  $X$  względem  $Y$ .