Kilka(naście) zadań, które warto przerobić przed egzaminem

1. Zmienne X i Y są niezależne, X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0,1]$, a zmienna Y ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}(Y=-1)=1/3$, $\mathbb{P}(Y=2)=2/3$.
a) Obliczyć $\mathbb{P}(3X<Y)$.
b) Wyznaczyć rozkład zmiennej XY.

2. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x,y)=Cx^2 1_{\{0\le |y|\le x\le 3\}}.$$

a) Wyznaczyć C.
b) Wyznaczyć rozkład zmiennych X oraz Y.
c) Obliczyć $\mathbb{P}(X+Y\le 3)$.
d) Obliczyć macierz kowariancji zmiennej (X,Y).
e) Rozstrzygnąć, czy zmienne X, Y są niezależne.
f) Rozstrzygnąć, czy zmienne X, Y/X są niezależne.
g) Obliczyć $\mathbb{E}(XY|Y)$, $\mathbb{E}(XY|X)$ oraz $\mathbb{P}(X>2|Y)$.

3. Zmienna losowa (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(0,0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$.
a) Wyznaczyć gęstość zmiennej (X,Y).
b) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X+Y,Y)$.
c) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X+5Y$.
d) Czy zmienne X, Y są niezależne?
e) Wyznaczyć taką wartość parametru a, by zmienne $X+aY$ oraz Y były niezależne.
f) Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2|Y)$.

4. W urnie znajdują się 2 białe i jedna czarna kula. Losujemy 800 razy ze zwracaniem po jednej kuli. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że liczba losowań, w których wyciągnięto białą kulę, będzie o co najmniej 200 większa niż liczba losowań, w których wyciągnięto czarną kulę.

5. Liczby $\{1,2,\ldots,n\}$ $(n\ge 5)$ ustawiono losowo w ciąg. Niech X, Y będą numerami miejsc, na których znalazły się liczby 1 i 2, odpowiednio. Obliczyć $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $\mathbb{P}(X\le 4|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X|Y)$.

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 1, a zmienna Z jest od nich niezależna i ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}(Z=-1)=\mathbb{P}(Z=1)=1/2$.
a) Obliczyć $\mathbb{P}(X+2Y\le 1)$.
b) Rozstrzygnąć, czy zmienne $X-Y$ oraz XZ mają ten sam rozkład.
c) Obliczyć $\mathbb{E}2^{X+Y}$.
d) Obliczyć $\mathrm{Var}(X-2Y)$.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.
a) Obliczyć $\mathbb{E}XY^2$.
b) Obliczyć macierz kowariancji zmiennej (X, Y).
c) Czy zmienne X, Y są niezależne?
d) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.
e) Obliczyć $\mathbb{E}e^X$.

8. W urnie znajduje się pięć sześciennych kostek, wśród których część może być fałszywa, z samymi szóstkami. Powtórzono 3000 razy następującą procedurę: wylosowano kostkę z urny, wykonano nią rzut, a następnie kostkę wrzucono z powrotem do urny. Okazało się, że szóstka pojawiła się 450 razy. Czy są podstawy by sądzić, że w urnie znajduje się co najmniej jedna nieprawidłowa kostka?

9. Zmienna losowa X ma standardowy jednowymiarowy rozkład normalny. Udowodnić, że zmienne X oraz $X/[X]$ są niezależne.

10. Rzucamy sześcienną kostką do gry aż do momentu, gdy wyrzucimy
a) trzy oczka,
b) trzy lub cztery oczka.
Wyznaczyć wartość oczekiwaną sumy wyrzuconych oczek.

11. Długość Z prawidłowego funkcjonowania pewnego urządzenia ma rozkład wykładniczy z parametrem $1/2$. Ponadto, jeśli $Z = z$, to czas docierania tego urządzenia ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, z/2]$. Wyznaczyć rozkład oraz wartość oczekiwaną czasu docierania.

12. Jaś rzuca kostką do momentu uzyskania trzeciej szóstki.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że potrzeba więcej niż 10 rzutów, jeżeli wiadomo, że doświadczenie nie zakończyło się do czwartego rzutu włącznie?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwie pierwsze szóstki pojawiły się w dwóch pierwszych rzutach, jeżeli wiadomo, że doświadczenie zakończyło się w siódmym rzucie?
c) Druga szóstka pojawiła się w 11. rzucie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzecia pojawi się w $n-$tym rzucie, gdzie $n = 12, 13, ...$?

13. W pewnym miasteczku są 4 bary. Pewnego wieczora 6 osób postanowiło udać się do baru. Każdy z nich wybiera bar losowo i niezależnie od pozostałych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że do każdego baru przyjdzie choć jeden klient?

14. Zmienne losowe X, Y, Z są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$.
a) Czy zdarzenia $\{X < Y\}$ i $\{Y < Z\}$ są niezależne?
b) Wyznaczyć rozkłady XY i Z^2.

15. W urnie znajduje się 10 karteczek: jedna z jedynką, dwie z dwójką, trzy z trójką, cztery z czwórką. Losujemy jedną karteczkę, a następnie rzucamy jeden raz tyloma kostkami, jaka liczba była na karteczce. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję sumy uzyskanych oczek.

16. W urnie są początkowo 2 kule białe i 3 czarne. Rzucamy 1 raz kostką. Jeżeli wypadnie "6", to nie zmieniamy składu urny, a jeżeli wypadnie "1"–"5", to go zmieniamy. W tym celu losujemy 1 kulę, zwracamy ją i dokładamy tyle kul tego samego koloru, co kula wylosowana, ile oczek wypadło na kostce. Na koniec losujemy z urny 1 kulę.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania na koniec kuli białej?

b) Jeżeli wylosowaliśmy kulę czarną, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wcześniej nie zmienialiśmy składu urny?

17. Rzucamy kostką do gry tak długo, aż po raz pierwszy wypadnie mniej niż 5 oczek. Niech $X-$ liczba rzutów, Y – liczba oczek, które wypadły w ostatnim rzucie, Z – liczba oczek, które wypadły w przedostatnim rzucie.

a) Wyznaczyć rozkłady zmiennych X, Y, Z.

b) Czy X i Y są niezależne?

c) Czy X, Y, i Z są niezależne?

18. Obróbka detalu trwa 5 minut jeżeli jest dobry i 10 minut, jeżeli jest wadliwy. Detali wadliwych jest 20%.

a) Jaka jest wartość oczekiwana obróbki $n = 900$ detali?

b) Które ze zdarzeń ma większe prawdopodobieństwo:

$A =$ obróbka 900 detali będzie trwała więcej niż 6000 minut,

$B =$ obróbka 900 detali będzie trwała mniej niż 6000 minut?