

## RP WNE 2016/2017, VIII seria zadań

*Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy.*

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{2k}{n(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennych  $X$  oraz  $Y = 2X + 5$ .

2. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{x+2}{8} 1_{(-2,2)}(x).$$

Obliczyć  $\mathbb{E}X$ ,  $\text{Var}X$ , współczynnik asymetrii  $X$  oraz kurtozę  $X$ .

3. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 4. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej  $3X^2 + 1$ .

4. Rozważmy rynek akcji z notowaniami ciągłymi. Prawdopodobieństwo, że kurs akcji pewnej spółki zanotuje (pierwszy) spadek w czasie niewiększym niż  $t$  od otwarcia sesji wynosi

$$p(t) = \begin{cases} 1 - t^{-4} & \text{dla } t \geq 1, \\ 0 & \text{dla } t < 1. \end{cases}$$

Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję czasu w którym kurs spółki wzrasta. Dla jakich  $p$  istnieje skończony  $p$ -ty moment tej zmiennej losowej?

5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej  $Y = \max(X, a)$ , gdzie  $a$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

6. Grupę 10 osób w wieku między 25 a 50 lat zapytano ile średnio minut zajmuje im dojazd do miejsca pracy. Uzyskano odpowiedzi: 40, 20, 20, 30, 30, 10, 60, 30, 60, 90. Wyznaczyć rozkład empiryczny  $\mu$  związany z tą próbką i obliczyć jego dystrybuantę w punkcie 50. Ile wynosi średnia empiryczna próbki?

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na ósme ćwiczenia):

1. Podać definicję  $p$ -tego momentu absolutnego zmiennej  $X$ .

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po ósmym ćwiczeniu):

2. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{1}{9}|x|1_{[-3,3]}(x)$ . Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych  $X$ ,  $Y = 3 - 5X$ .

3. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na przedziale  $[-1, 1]$ . Wyznaczyć wariancję zmiennej  $2X^5 - 1$ , kurtozę zmiennej  $X$  oraz drugi moment zmiennej  $X^2 - 1$ .

4. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład zadany przez  $\mathbb{P}(X = k) = 1/21$ ,  $k = -10, -9, \dots, 10$ . Wyznaczyć wariancję zmiennej  $X$ .

5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X = -2) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/3, \quad \mathbb{P}(X = a) = 1/6.$$

Wyznaczyć taką liczbę  $a$ , by zmienna  $X$  miała najmniejszą możliwą wariancję.

6. W celu wstępnego zbadania rozkładu liczby wypadków na pewnym ruchliwym skrzyżowaniu, zgromadzono dane z ubiegłych lat: w latach 2000, 2001,  $\dots$ , 2010 liczby te wynosiły odpowiednio 10, 13, 7, 18, 15, 12, 20, 24, 19, 10, 21. Wyznaczyć wartość dystrybuanty empirycznej tej próbki w punkcie 15, medianę i pierwszy decyl rozkładu empirycznego.