

## RP WNE 2016/2017, VII seria zadań

*Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy.*

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} 1_{[0,1]}(x)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}(3-2X)$ .
2. Zmienna  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{1}{2} \sin x 1_{[0,\pi]}(x)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E} \cos X$ .
3. Zmienna losowa  $X$  ma standardowy rozkład normalny. Obliczyć  $\mathbb{E}e^{2X}$  oraz  $\mathbb{E}e^{X^2/4}$ .
4. Dochód pracownika zatrudnionego w pewnej fabryce jest zmienną losową o rozkładzie zadany przez dystrybuantę

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 200, \\ ct^2(1500 - t) & \text{dla } 200 \leq t < 1000, \\ 1 & \text{dla } t \geq 1000, \end{cases}$$

gdzie  $c = 2 \cdot 10^{-9}$ . Wyznaczyć średni dochód pracownika.

5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład geometryczny z parametrem  $p \in (0, 1)$  (tzn.  $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ). Obliczyć  $\mathbb{E}X$ .

6. Zmienna  $X$  ma rozkład Poissona z parametrem 3. Obliczyć  $\mathbb{E}X$ ,  $\mathbb{E}X(X-1)$ ,  $\mathbb{E}X^2$  oraz  $\mathbb{E}2^X$ .

7. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo jednym z trzech kolorów: białym, czarnym lub czerwonym (kolory dla różnych odcinków wybieramy niezależnie). Niech  $X$  oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Wyznaczyć  $\mathbb{E}X$ .

8. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wypadnie każda możliwa liczba oczek. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

9. W grupie jest  $n$  studentów. Któregoś dnia prowadzący zajęcia rozdał sprawdzone kartkówki w sposób losowy (przy czym każdemu studentowi wręczył jedną kartkówkę). Niech  $X$  oznacza liczbę studentów, którzy otrzymali swoją kartkówkę. Obliczyć  $\mathbb{E}X$ .

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na siódme ćwiczenia):

1. Podać definicję wartości oczekiwanej zmiennej losowej ciągłej  $X$ .

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po siódmym ćwiczeniu):

2. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = 2x^{-3} 1_{[1,\infty)}(x)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}(1-X)$ .
3. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = C\sqrt{x} 1_{[0,1]}(x)$ . Obliczyć  $C$ ,  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}(5X+2)$ .
4. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{C}{1+x} 1_{[1,5]}(x)$ . Obliczyć  $C$ ,  $\mathbb{E}X$  oraz  $\mathbb{E}(4X+3)$ .
5. Zmienna losowa  $X$  ma standardowy rozkład normalny. Obliczyć  $\mathbb{E}X(X+1)$  i  $\mathbb{E}e^{3X^2/8}$ .
6. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = (e-1)^{-1} e^{1-x} 1_{[0,1]}(x)$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(X+1)$  oraz  $\mathbb{E}2^{X+2}$ .
7. Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 49\}$  losujemy 6 liczb bez zwracania. Niech  $X$  oznacza liczbę nieparzystych numerów wśród wylosowanych. Wyznaczyć  $\mathbb{E}X$ .
8. Dziesięć dziewczynek oraz dziesięciu chłopców ustawia się losowo w parę. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby par złożonych z samych dziewczynek.