RP WNE 2016/2017, VII+VIII seria zadań

Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w piątki.

1. Dochód pracownika zatrudnionego w pewnej fabryce jest zmienną losową o rozkładzie zadanym przez dystrybuantę

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 200, \\ ct^2(1500 - t) & \text{dla } 200 \leqslant t < 1000, \\ 1 & \text{dla } t \geqslant 1000, \end{cases}$$

gdzie $c = 2 \cdot 10^{-9}$. Wyznaczyć średni dochód i wariancję dochodu pracownika.

2. Liczba wypadków danego dnia w pewnym mieście ma rozkład Poissona z parametrem 10 jeśli jest to poniedziałek $-$ piątek oraz rozkład Poissona z parametrem 3 jeśli jest to sobota lub niedziela. Niech X oznacza łączną liczbę wypadków w ustalonym tygodniu. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

3. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo jednym z trzech kolorów: białym, czarnym lub czerwonym (kolory dla różnych odcinków wybieramy niezależnie). Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

4. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wypadnie każda możliwa liczba oczek. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

5. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{2k}{n(n+1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennych X oraz $Y = 2X + 5$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{x+2}{8} 1_{(-2,2)}(x).$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Var}X$, współczynnik asymetrii X oraz kurtozę X.

7. Rozważmy rynek akcji z notowaniami ciągłymi. Prawdopodobieństwo, że kurs akcji pewnej spółki zanotuje (pierwszy) spadek w czasie niewiększym niż t od otwarcia sesji wynosi

$$p(t) = \begin{cases} 1 - t^{-4} & \text{dla } t \geqslant 1, \\ 0 & \text{dla } t < 1. \end{cases}$$

Niech X oznacza czas w którym kurs spółki wzrasta. Dla jakich p istnieje skończony p-ty moment tej zmiennej losowej?

9. Grupę 10 osób w wieku między 25 a 50 lat zapytano ile średnio minut zajmuje im dojazd do miejsca pracy. Uzyskano odpowiedzi: 40, 20, 20, 30, 30, 10, 60, 30, 60, 90. Wyznaczyć rozkład empiryczny μ związany z tą próbką i obliczyć jego dystrybuantę w punkcie 50. Ile wynosi średnia empiryczna próbki?

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na te ćwiczenia):

1. Podać definicję p-tego momentu absolutnego zmiennej X.

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po ósmych ćwiczeniach):

2. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 49\}$ losujemy 6 liczb bez zwracania. Niech X oznacza liczbę nieparzystych numerów wśród wylosowanych. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

3. Dziesięć dziewczynek oraz dziesięciu chłopców ustawia się losowo w pary. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby par złożonych z samych dziewczynek.

4. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{9}|x|1_{[-3,3]}(x)$. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych X, $Y = 3 - 5X$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$. Wyznaczyć wariancję zmiennej $2X^5 - 1$, kurtozę zmiennej X oraz drugi moment zmiennej $X^2 - 1$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X = k) = 1/21, \qquad k = -10, -9, \ldots, 10.$$

Wyznaczyć wariancję zmiennej X.

7. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X = -2) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/3, \quad \mathbb{P}(X = a) = 1/6.$$

Wyznaczyć taką liczbę a, by zmienna X miała najmniejszą możliwą wariancję.

8. W celu wstępnego zbadania rozkładu liczby wypadków na pewnym ruchliwym skrzyżowaniu, zgromadzono dane z ubiegłych lat: w latach 2000, 2001, ..., 2010 liczby te wynosiły odpowiednio 10, 13, 7, 18, 15, 12, 20, 24, 19, 10, 21. Wyznaczyć wartość dystrybuanty empirycznej tej próbki w punkcie 15, medianę i pierwszy decyl rozkładu empirycznego.