RP WNE 2016/2017, VI seria zadań

Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy.

1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) e^X, b) X^2. Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

2. Wyznaczyć kwantyl rzędu $\rho = 5/16$ dla a) rozkładu wykładniczego z parametrem λ, b) rozkładu Bernoulliego z parametrami 4, 1/2, c) rozkładu Poissona z parametrem 1.

3. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{6}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X-1)$.

4. Rozważmy następującą grę. Rzucamy symetryczną monetą do momentu uzyskania orła. Jeśli orzeł pojawił się w n-tym rzucie, wygrywamy $(1,5)^n$ złotych. Ile warto zapłacić za udział w tej grze? A gdyby wygrana za wyrzucenie orła w n-tym rzucie wynosiła 2^n złotych?

5. Z urny zawierającej n kul ponumerowanych liczbami od 1 do n losujemy dwa razy po jednej kuli ze zwracaniem. Niech X oznacza największy z numerów, który się pojawił na wylosowanych kulach. Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz obliczyć $\mathbb{E}X$.

6. Liczba wypadków danego dnia w pewnym mieście ma rozkład Poissona z parametrem 10 jeśli jest to poniedziałek − piątek oraz rozkład Poissona z parametrem 3 jeśli jest to sobota lub niedziela. Niech X oznacza łączną liczbę wypadków w ustalonym tygodniu. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na szóste ćwiczenia):

1. Podać definicję kwantyla rzędu ρ rozkładu zmiennej losowej X.

2. Podać definicję wartości oczekiwanej zmiennej losowej dyskretnej X.

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po szóstych ćwiczeniach):

3. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $\ln X$.

4. Niech X będzie zmienną losową z rozkładu jednostajnego na odcinku $(0,1)$, a $Y = \max\{X, \frac{1}{2}\}$. Wyznaczyć kwantyle rzędu $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ zmiennych X i Y.

5. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 10\}$, zadany przez

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \ldots = \mathbb{P}(X=10) = p.$$

Obliczyć p, $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X+5)$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{2, 4, 6 \ldots, 2n\}$, zadany przez $P(X=k) = \frac{1}{n}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X+1)$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego z parametrami 5 i $\frac{1}{3}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X-1)$.