

RP WNE 2016/2017, VI+VII seria zadań

Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w piątki.

1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) e^X , b) X^2 . Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

2. Wyznaczyć kwantyl rzędu $\rho = 5/16$ dla a) rozkładu wykładniczego z parametrem λ , b) rozkładu Bernoulliego z parametrami 4, 1/2, c) rozkładu Poissona z parametrem 1.

3. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{6}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X - 1)$.

4. Zmienna X ma rozkład Poissona z parametrem 3. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}X(X - 1)$, $\mathbb{E}X^2$ oraz $\mathbb{E}2^X$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} 1_{[0,1]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(3 - 2X)$.

6. Zmienna X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{2} \sin x 1_{[0,\pi]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E} \cos X$.

7. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny. Obliczyć $\mathbb{E}e^{2X}$ oraz $\mathbb{E}e^{X^2/4}$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na te ćwiczenia):

1. Podać definicję kwantyla rzędu ρ rozkładu zmiennej losowej X .
2. Podać definicję wartości oczekiwanej zmiennej losowej dyskretnej X .
3. Podać definicję wartości oczekiwanej zmiennej losowej ciągłej X .

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po szóstych ćwiczeniach):

4. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej $\ln X$.

5. Niech X będzie zmienną losową z rozkładu jednostajnego na odcinku $(0, 1)$, a $Y = \max\{X, \frac{1}{2}\}$. Wyznaczyć kwantyle rzędu $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{4}$ zmiennych X i Y .

6. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{1, 2, \dots, 10\}$, zadany przez

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \dots = \mathbb{P}(X = 10) = p.$$

Obliczyć p , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X + 5)$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$, zadany przez $P(X = k) = \frac{1}{n}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X + 1)$.

8. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego z parametrami 5 i $\frac{1}{3}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X - 1)$.

9. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 2x^{-3}1_{[1, \infty)}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(1 - X)$.

10. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = C\sqrt{x}1_{[0, 1]}(x)$. Obliczyć C , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(5X + 2)$.

11. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{C}{1+x}1_{[1, 5]}(x)$. Obliczyć C , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X + 3)$.

12. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny. Obliczyć $\mathbb{E}X(X + 1)$ i $\mathbb{E}e^{3X^2/8}$.

13. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = (e - 1)^{-1}e^{1-x}1_{[0, 1]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}(X + 1)$ oraz $\mathbb{E}2^{X+2}$.