

## RP WNE 2016/2017, V seria zadań

1. Dystrybuanta  $F$  zmiennej losowej  $X$  zadana jest następująco:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -2, \\ \frac{1}{3} & \text{jeśli } t \in [-2, 0), \\ \frac{1}{3}t + 1/2 & \text{jeśli } t \in [0, 1), \\ \frac{5}{6} & \text{jeśli } t \in [1, 5), \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 5. \end{cases}$$

Obliczyć  $\mathbb{P}(X \in (3, 7))$ ,  $\mathbb{P}(X \in [-2, -1])$ ,  $\mathbb{P}(X \in [-2, -1))$ ,  $\mathbb{P}(X = 0)$ ,  $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$ . Czy  $X$  ma rozkład dyskretny? Czy  $X$  ma rozkład ciągły?

2. Każdego dnia do ustalonej osoby dzwoni albo jej kolega (z prawdopodobieństwem  $1/3$ ), albo jej koleżanka (z prawdopodobieństwem  $2/3$ ). Czas trwania rozmowy z kolegą (liczony w minutach) jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[1, 5]$ ; w przypadku gdy dzwoni koleżanka, jest to zmienna o rozkładzie wykładniczym z parametrem  $1/5$ . Niech  $X$  oznacza długość rozmowy, która się odbyła ustalonego dnia.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej  $X$  oraz jego gęstość.

b) Załóżmy, że  $X > 4$  (tzn. rozmowa trwała dłużej niż 4 minuty). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dzwoniła koleżanka?

3. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{3}{8}x^2 1_{(0,2)}(x)$ . Wyznaczyć rozkłady zmiennych a)  $\max\{X, 1\}$ , b)  $X^{-2}$ . Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

4. Zmienna  $X$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[0, 1]$ . Wyznaczyć rozkład  $Y = -\ln X$ .

5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Cauchy'ego, tzn. rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

a) Wyznaczyć dystrybuantę  $X$ .

b) Dla jakiej wartości  $t$  mamy  $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq t) = 7/12$ ?

c) Wyznaczyć rozkład zmiennej  $1/X$ .

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po piątym ćwiczeniu):

1. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{1}{2} \sin x 1_{[0,\pi]}(x)$ . Wykazać, że zmienna  $\pi - X$  ma ten sam rozkład, co  $X$ .

2. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład Bernoulliego  $B(n, p)$ . Sprawdzić, że zmienna  $n - X$  ma rozkład Bernoulliego  $B(n, 1 - p)$ .

3. Z koła o promieniu  $R$  losujemy punkt. Niech  $X$  oznacza odległość tego punktu od środka koła. Wyznaczyć rozkład zmiennej  $X^2$ .

4. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład z gęstością  $g(x) = \frac{1}{2}x 1_{[0,2]}(x)$ . Wyznaczyć rozkład zmiennej  $Y = \min\{X - 1, 0\}$ . Czy ma on gęstość?