RP WNE 2016/2017, XII seria zadań

Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy

1. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ oraz $(0, 1)$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(XY^2 + 3X^2Y - 1|X)$ oraz $\mathbb{E}(\sin Y|X)$.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = e^{-x}1_{\{0\leqslant y\leqslant x\}}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(XY|Y)$ oraz $\mathbb{P}(X \geqslant 3|Y)$.

3. Rzucamy raz kostką, a następnie rzucamy nią tyle razy, ile oczek wypadło za pierwszym razem. Niech X oznacza sumę wszystkich liczb oczek (łącznie z pierwszym rzutem). Obliczyć $\mathbb{E}X$.

4. Czas oczekiwania X na pierwszy spadek notowań pewnej firmy ma rozkład wykładniczy z parametrem 3. Zakładając, że spadek miał miejsce w chwili t, czas oczekiwania na pierwszy wzrost notowań (począwszy od chwili t), oznaczony przez Y, ma ponownie rozkład wykładniczy, tym razem z parametrem $1/t$. Obliczyć $\mathbb{E}(X + Y)$.

5. Załóżmy, że liczba głównych wygranych w Lotto (trafień szóstek) w pojedynczym losowaniu jest zmienną losową X o rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = \frac{1}{4}$. Przypuśćmy, że każdy z posiadaczy wygrywającego losu odbiera swoją nagrodę z prawdopodobieństwem 90%. Niech Y oznacza liczbę odebranych głównych wygranych. Opisać rozkład warunkowy $Y|X = x$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}Y$.

6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{e^{-y}}{y}1_{\{0<x<y\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}(X \,|\, Y)$, $\mathbb{E}(X^2 \sin(Y) \,|\, Y)$, oraz $\mathbb{E}X$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Zadania, jakie trzeba umieć rozwiązać po dwunastych ćwiczeniach:

1. Pracownik wykonuje dwie rozmowy telefoniczne: czas trwania pierwszej rozmowy, oznaczony przez X, ma rozkład jednostajny na przedziale $[10, 20]$; czas trwania drugiej rozmowy ma rozkład jednostajny na przedziale $[5, X]$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną łącznego czasu trwania rozmów.

2. Liczba monet w urnie jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 2. Losujemy kolejno monety z urny i każdą z nich wykonujemy rzut. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych orłów. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

3. Rzucono raz kostką i raz monetą. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych oczek, pomnożoną przez 2 jeśli na monecie wypadł orzeł. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

4. Na odcinku $[0, 1]$ wybieramy losowo liczbę X (zgodnie z rozkładem jednostajnym), a następnie z odcinka $[0, X]$ wybieramy losowo liczbę Y (także zgodnie z rozkładem jednostajnym). Obliczyć $\mathbb{E}Y$.

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(2, 0)$, $(0, 1)$ oraz $(-1, 0)$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2 + XY|Y)$.

6. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = (x + y)1_{\{0\leqslant x\leqslant 1,\, 0\leqslant y\leqslant 1\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X + Y|Y)$.