

## RP WNE 2016/2017, XI seria zadań

*Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla osób mających ćwiczenia w środy*

1. Porównano zatrudnienie w różnych szwalniach w pewnej strefie ekonomicznej. Zaobserwowano, iż liczba krawcowych zatrudnionych w poszczególnych firmach jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale  $[100, 300]$ . Wynagrodzenie krawcowej zależy od firmy, i wynosi średnio 2400 PLN przy odchyleniu standardowym  $400\sqrt{3}$ . Stwierdzono, iż współczynnik korelacji wielkości zatrudnienia i poziomu wynagrodzenia w zbadanych firmach równy jest 0,6. Wyznaczyć najlepsze liniowe przybliżenie zależności między oferowanym wynagrodzeniem a liczbą osób podejmującą zatrudnienie w danej firmie.

2. W urnie nr 1 znajdują się trzy kule ponumerowane liczbami 1, 2 i 3, a w urnie nr 2 - dwie kule, z numerami 1 i 2. Losujemy urnę, a z urny jedną kulę. Niech  $X$  oznacza numer wylosowanej urny, a  $Y$  - numer wylosowanej kuli. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

3. Rzucono dwa razy kostką i przez  $X, Y$  oznaczono liczby oczek w pierwszym i drugim rzucie. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$ ,  $\mathbb{E}(X + Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|X + Y)$ .

4. Ze zbioru  $\{1, 2, \dots, 10\}$  losujemy bez zwracania dwie liczby, mniejszą oznaczamy przez  $X$ , a większą przez  $Y$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(XY + X|X)$ .

5. Miesięczne zużycie energii elektrycznej w pewnej fabryce ma rozkład jednostajny na przedziale  $[200, 250]$ . Przy zadanym zużyciu  $\lambda$ , ilość wyemitowanego dwutlenku węgla ma rozkład wykładniczy z parametrem  $5 - \lambda/100$ . Wyznaczyć rozkład (gęstość) ilości wyemitowanego dwutlenku węgla w ciągu danego miesiąca.

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria, jaką trzeba znać przychodząc na ćwiczenia:

1. Podać wzory na współczynniki  $a$  i  $b$  najlepszego liniowego przybliżenia zmiennej losowej  $Y$  zmienną losową  $X$ .

2. Podać definicję warunkowej wartości oczekiwanej dla zmiennej dyskretnej.

3. Podać definicję gęstości warunkowej.

Zadania, jakie trzeba umieć rozwiązać po jedenastych ćwiczeniach:

4. Nadajnik wysyła sygnał  $X$ . Odbiornik odbiera sygnał  $Y = aX + Z$ , gdzie  $a > 0$  jest współczynnikiem wzmocnienia, zaś  $Z$  jest zakłóceniem. Wiadomo, że  $X, Z$  są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym  $\mathbb{E}X = m$ ,  $\text{Var } X = 1$ ,  $\mathbb{E}Z = 0$  oraz  $\text{Var } Z = \sigma^2$ . Wyznaczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych  $X, Y$  oraz regresję liniową  $X$  względem  $Y$ .

5. Wiadomo, że  $\mathbb{P}(Y = 1|X = 5) = 1/3$  oraz  $\mathbb{P}(Y = 5|X = 5) = 2/3$ . Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X = 5)$  oraz  $\mathbb{E}(XY^2|X = 5)$ .

6. W urnie znajdują się dwie białe kule, z numerami 1 i 2, oraz trzy czarne kule, z numerami 1, 2 oraz 3. Z urny wyciągnięto bez zwracania dwie kule. Niech  $X$  oznacza największy z wylosowanych numerów, a  $Y$  oznacza liczbę wylosowanych białych kul. Obliczyć  $\mathbb{E}(Y|X)$  oraz  $\mathbb{E}(X|Y)$ .

7. Rzucono trzy razy monetą. Niech  $X$  oznacza łączną liczbę wyrzuconych orłów oraz

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadł orzeł,} \\ 0 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadła reszka.} \end{cases}$$

Obliczyć  $\mathbb{E}(X|Y)$  oraz  $\mathbb{E}(XY|X)$ .