Rachunek Prawdopodobieństwa dla WNE
Egzamin, 8 marca 2010r., grupa A

....
imię i nazwisko nr indeksu

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz grupą (A, B, C lub D). Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. (6p.) Rzucamy cztery razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jakaś liczba oczek wystąpi co najmniej dwa razy i będą co najwyżej dwie jedynki?

2. Są cztery kostki normalne i jedna z samymi jedynkami. Losujemy jedną z tych kostek i wykonujemy nią 3 rzuty. (3p.) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek wynosi 3? (3p.) Jeżeli wiadomo, że w dwóch pierwszych rzutach wypadła jedynka, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconch oczek jest nie większa niż 4?

3. (6p.) Liczby wypadków drogowych w ciągu danego dnia w miastach A, B są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami 10, 12, odpowiednio. Wiadomo, iż danego dnia w obu miastach było w sumie 15 wypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wszystkie te wypadki miały miejsce w mieście A?

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład o gęstości $g(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$, a rozkład Y jest zadany przez $\mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 1/3$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/6$. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{P}(XY > 0)$. (3p.) Obliczyć $\mathrm{Cov}(XY, X + Y)$.

5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 1, \\ 1 - (2t)^{-1} & \text{dla } t \geq 1. \end{cases}$$

(2p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 2 \leq Y)$. (4p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = \min\{X, Y\}$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \sin(2x)1_{[0,\pi/2]}(x).$$

(3p.) Obliczyć $\mathrm{Var}(X + 1)$. (3p.) Udowodnić, że zmienne X oraz $\pi/2 - X$ mają ten sam rozkład.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. (3p.) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X + Y, Y)$. (3p.) Rozstrzygnąć, czy zmienne X oraz $2X - 5Y$ są niezależne.

8. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = 4e^{-2x}1_{\{(x,y):0 \leq y \leq x\}}.$$

(3p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 2)$. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{E}(2X + Y|X)$.

9. Rzucono dwa razy kostką. Niech X, Y oznaczają odpowiednio liczby wyrzuconych oczek w I i II rzucie. (2p.) Obliczyć $\mathbb{E}(X(X + Y)|X)$. (4p.) Obliczyć $\mathbb{E}(1_{\{X=Y\}}|Y)$.

10. (6p.) Dysponujemy dwiema prawidłowymi monetami i wykonujemy po 900 rzutów każdą z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba orłów otrzymanych na pierwszej monecie różni się od łącznej liczby orłów na drugiej monecie o nie więcej niż 50?

Rachunek Prawdopodobieństwa dla WNE

Egzamin, 8 marca 2010r., grupa B

....

imię i nazwisko nr indeksu

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz grupą (A, B, C lub D). Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. (6p.) Rzucamy pięć razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jakaś liczba oczek wystąpi co najmniej trzy razy i będą co najwyżej dwie piątki?

2. Są cztery kostki normalne i jedna z samymi szóstkami. Losujemy jedną z tych kostek i wykonujemy nią 3 rzuty. (3p.) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek wynosi 18? (3p.) Jeżeli wiadomo, że w dwóch pierwszych rzutach wypadła szóstka, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconch oczek wynosi co najmiej 17?

3. (6p.) Liczby wypadków drogowych w ciągu danego dnia w miastach A, B są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami 11, 13, odpowiednio. Wiadomo, iż danego dnia w obu miastach było w sumie 10 wypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wszystkie te wypadki miały miejsce w mieście A?

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład o gęstości $g(x) = \frac{1}{2}x1_{[0,2]}(x)$, a rozkład Y jest zadany przez $\mathbb{P}(Y = -1) = 1/3$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 1/6$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{P}(XY > 0)$. (3p.) Obliczyć $\mathrm{Cov}(XY, X - Y)$.

5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 2, \\ 1 - t^{-1} & \text{dla } t \geq 2. \end{cases}$$

(2p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 3 \leq Y)$. (4p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = \max\{X, Y\}$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \sin(2x)1_{[0,\pi/2]}(x).$$

(3p.) Obliczyć $\mathrm{Var}(X - 1)$. (3p.) Udowodnić, że zmienne X oraz $\pi/2 - X$ mają ten sam rozkład.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. (3p.) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X, X + Y)$. (3p.) Rozstrzygnąć, czy zmienne $3X - Y$ oraz Y są niezależne.

8. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{1}{2}e^{-x}1_{\{(x,y):0\leq y\leq 2x\}}.$$

(3p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X \geq 1)$. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X - 2Y|X)$.

9. Rzucono dwa razy kostką. Niech X, Y oznaczają odpowiednio liczby wyrzuconych oczek w I i II rzucie. (2p.) Obliczyć $\mathbb{E}(Y(X + Y)|Y)$. (4p.) Obliczyć $\mathbb{E}(1_{\{X=Y\}}|X)$.

10. (6p.) Dysponujemy dwiema prawidłowymi monetami i wykonujemy po 800 rzutów każdą z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba orłów otrzymanych na pierwszej monecie różni się od łącznej liczby orłów na drugiej monecie o nie więcej niż 40?

Rachunek Prawdopodobieństwa dla WNE
Egzamin, 8 marca 2010r., grupa C

....
imię i nazwisko nr indeksu

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz grupą (A, B, C lub D). Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. (6p.) Rzucamy cztery razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będą co najwyżej dwie czwórki i jakaś liczba oczek wystąpi co najmniej dwa razy?

2. Są trzy kostki normalne i dwie z samymi jedynkami. Losujemy jedną z tych kostek i wykonujemy nią 3 rzuty. (3p.) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek wynosi 3? (3p.) Jeżeli wiadomo, że w dwóch pierwszych rzutach wypadła jedynka, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconch oczek jest nie większa niż 4?

3. (6p.) Liczby wypadków drogowych w ciągu danego dnia w miastach A, B są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami 5, 10, odpowiednio. Wiadomo, iż danego dnia w obu miastach było w sumie 12 wypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wszystkie te wypadki miały miejsce w mieście A?

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład o gęstości $g(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$, a rozkład Y jest zadany przez $\mathbb{P}(Y = -1) = 1/4$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 1/2$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/4$. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{P}(XY > 0)$. (3p.) Obliczyć $\mathrm{Cov}(XY, X + 2Y)$.

5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 1, \\ 1 - t^{-1} & \text{dla } t \geq 1. \end{cases}$$

(2p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 4 \leq Y)$. (4p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = \max\{X, Y\}$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \sin(2x)1_{[0,\pi/2]}(x).$$

(3p.) Obliczyć $\mathrm{Var}(X + 2)$. (3p.) Udowodnić, że zmienne X oraz $\pi/2 - X$ mają ten sam rozkład.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. (3p.) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X + Y, Y)$. (3p.) Rozstrzygnąć, czy zmienne X oraz $2X - 7Y$ są niezależne.

8. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = 2e^{-2x}1_{\{(x,y):0 \leq y \leq 2x\}}.$$

(3p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X \geq 2)$. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{E}(2X + Y|X)$.

9. Rzucono dwa razy kostką. Niech X, Y oznaczają odpowiednio liczby wyrzuconych oczek w I i II rzucie. (2p.) Obliczyć $\mathbb{E}(X(X - Y)|X)$. (4p.) Obliczyć $\mathbb{E}(1_{\{X=Y\}}|Y)$.

10. (6p.) Dysponujemy dwiema prawidłowymi monetami i wykonujemy po 1000 rzutów każdą z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba orłów otrzymanych na pierwszej monecie różni się od łącznej liczby orłów na drugiej monecie o nie więcej niż 45?

Rachunek Prawdopodobieństwa dla WNE
Egzamin, 8 marca 2010r., grupa D

....
imię i nazwisko nr indeksu

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu oraz grupą (A, B, C lub D). Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. (6p.) Rzucamy pięć razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że jakaś liczba oczek wystąpi co najmniej trzy razy i będą co najwyżej dwie szóstki?

2. Są cztery kostki normalne i dwie z samymi szóstkami. Losujemy jedną z tych kostek i wykonujemy nią 3 rzuty. (3p.) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconych oczek wynosi 18? (3p.) Jeżeli wiadomo, że w dwóch pierwszych rzutach wypadła szóstka, to jakie jest prawdopodobieństwo tego, że suma wyrzuconch oczek wynosi co najmniej 17?

3. (6p.) Liczby wypadków drogowych w ciągu danego dnia w miastach A, B są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami 10, 14, odpowiednio. Wiadomo, iż danego dnia w obu miastach było w sumie 11 wypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wszystkie te wypadki miały miejsce w mieście A?

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład o gęstości $g(x) = \frac{2}{3}x1_{[1,2]}(x)$, a rozkład Y jest zadany przez $\mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$, $\mathbb{P}(Y = 0) = 1/3$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/6$. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{P}(XY > 0)$. (3p.) Obliczyć $\mathrm{Cov}(XY, 2X + Y)$.

5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 2, \\ 1 - (2t)^{-1} & \text{dla } t \geq 2. \end{cases}$$

(2p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 4 \leq Y)$. (4p.) Wyznaczyć rozkład zmiennej $Z = \max\{X, Y\}$.

6. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \sin(2x)1_{[0,\pi/2]}(x).$$

(3p.) Obliczyć $\mathrm{Var}(X - 2)$. (3p.) Udowodnić, że zmienne X oraz $\pi/2 - X$ mają ten sam rozkład.

7. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. (3p.) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X, X + Y)$. (3p.) Rozstrzygnąć, czy zmienne Y oraz $5X - 2Y$ są niezależne.

8. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = e^{-x}1_{\{(x,y):0 \leq y \leq x\}}.$$

(3p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 1)$. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X + Y|X)$.

9. Rzucono dwa razy kostką. Niech X, Y oznaczają odpowiednio liczby wyrzuconych oczek w I i II rzucie. (2p.) Obliczyć $\mathbb{E}(Y(X - 2Y)|Y)$. (4p.) Obliczyć $\mathbb{E}(1_{\{X=Y\}}|X)$.

10. (6p.) Dysponujemy dwiema prawidłowymi monetami i wykonujemy po 800 rzutów każdą z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że łączna liczba orłów otrzymanych na pierwszej monecie różni się od łącznej liczby orłów na drugiej monecie o nie więcej niż 45?