Rachunek Prawdopodobieństwa dla WNE

Egzamin, 5 lutego 2010r., grupa A

....

imię i nazwisko nr indeksu

Czas trwania: 180 minut. Rozwiązania różnych zadań prosimy pisać na oddzielnych kartkach wraz z imieniem, nazwiskiem , numerem indeksu oraz grupą (A, B, C lub D). Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.

1. Rzucamy 5 razy symetryczną kostką do gry. (3p.) Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że ani razu nie wypadnie parzysta liczba oczek lub nie wypadnie ani jedna trójka. (3p.) Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że co najmniej 3 razy wypadnie liczba większa niż 4, jeżeli wiadomo że nie wypadła żadna jedynka ani żadna dwójka.

2. (6p.) Na ulicy są 4 sklepy spożywcze czynne przed 7 rano. Każda z 12 osób wychodzących przed 7 z psem kupuje bułeczki w jednym losowo wybranym sklepie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do każdego sklepu przyjdzie przed 7 choć jeden klient z psem?

3. Rozważmy funkcję

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0; \\ a(1-\cos t) & \text{dla } 0 \leq t < \pi; \\ 1 & \text{dla } \pi \leq t. \end{cases}$$

(3p.) Wyznaczyć wartość stałej a, dla której funkcja ta jest dystrybuantą zmiennej losowej X posiadającej gęstość. Obliczyć tę gęstość. (3p.) Obliczyć $\mathbb{E}X$.

4. (6p.) Czas bezawaryjnej pracy (liczony w godzinach) pewnego urządzenia jest zmienną losową o gęstości $g(x) = \frac{2}{x^3}1_{[1,\infty)}(x)$. Wiadomo, że urządzenie jest sprawne po 4 godzinach pracy. Wyznaczyć prawdopodobieństwo tego, że będzie ono sprawne po 6 godzinach pracy.

5. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0,2]$, natomiast Y ma rozkład następujący: $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(Y=3) = \frac{1}{4}$. Zmienne losowe X i Y są niezależne. (3p.) Obliczyć $\mathbb{P}(X < Y)$. (3p.) Obliczyć $\mathrm{Var}[XY]$.

6. Zmienna losowa (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład z gęstością

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{5x^2+4xy+y^2}{2}\right).$$

(3p) Czy zmienne losowe X i Y są niezależne? (3p) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X+1$.

7. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości:

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{dla } (x,y) \in \mathcal{T}, \\ 0 & \text{dla } (x,y) \notin \mathcal{T}, \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{T}$ jest trójkątem o wierzchołkach (0,0), (0,1), (2,0). (3p.) Roztrzygnąć, czy zmienne losowe X i Y są niezależne. (3p.) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

8. (6p.) Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma średnią $(0,0)$ i macierz kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Obliczyć $\mathbb{E}(X+Y+1)(2X+Y)$.

9. (6p.) Z talii 52 kart losujemy ze zwracaniem 13 razy po jednej karcie. Niech X oznacza liczbę króli wśród pierwszych siedmiu kart, a Y liczbę króli wśród wszystkich wylosowanych kart. Wyznaczyć $\mathbb{E}(XY+2|X)$.

10. (6p.) Rzucamy 900 razy prawidłową kostką. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że suma parzystych liczb oczek znajdzie się w przedziale $[1700, 1900]$.