Imię i nazwisko:... Numer indeksu:.....................

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE
grupa I, 13 grudnia 2008

Część testowa

1. (1pkt) Rzucono dwa razy kostką i w każdym rzucie wypadła parzysta liczba oczek. Prawdopodobieństwo tego, że suma oczek wynosi co najmniej 10, jest równe ....

2. (1pkt) Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Wówczas

   a) $2X + 5$ ma rozkład ciągły (T/N).........,

   b) $\mathbb{P}(X > 2|X > 1) = \mathbb{P}(X > 1)$ (T/N).........,

   c) istnieje skończony szósty moment zmiennej X (T/N)......... .

3. (1pkt) Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem o boku 1. Losujemy pięć punktów P, Q, R, S, T ze zbioru $\{A, B, C, D\}$. Niech X oznacza długość łamanej $PQRST$. Wówczas

   $\mathbb{E}X =$ ....

   Uwaga: $AAAAA$ też jest łamaną, o długości 0.

4. (1pkt) Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkłady o dystrybuantach $F_X(t) = 1_{[5,\infty)}(t)$, $F_Y(t) = (1 - e^{-t})1_{[0,\infty)}(t)$. Wynika stąd, że zmienna $\max(X, Y)$ ma dystrybuantę

   $F(t) =$.....................

5. (1pkt) Zmienna losowa X ma rozkład $\Gamma(2, 1)$. Gęstość zmiennej $\sqrt{X}$ wynosi

   $g(x) =$............................

6. (1pkt) Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 1. Wówczas $\mathbb{P}(X + 3Y \le 2|X + Y > 0) =$.........

7. (1pkt) Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. Wówczas $\mathrm{Cov}(Y, XY) =$ ....

8. (1pkt) Zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Wówczas gęstość zmiennej $(X, X - Y)$ jest równa

   $g(x, y) =$..

Imię i nazwisko:.. .... Numer indeksu:........................

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE
grupa I, 13 grudnia 2008

Część zadaniowa

1. (2pkt) 20 osób, wśród których są osoby A i B, ustawia się losowo w kolejce. Niech X oznacza liczbę osób stojących między A i B. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.

2. (2pkt) Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona z parametrem 3, a Y ma rozkład geometryczny z parametrem 1/2. Obliczyć $\mathbb{P}(X = Y - 1)$.

3. (2pkt) Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$, a Y ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X - 2Y$.

4. (2pkt) Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{1}{x} 1_{\{0<y\leq x\leq 1\}}.$$

Udowodnić, że zmienne X, $\frac{Y}{X}$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Co to za rozkład?

Odpowiedzi (tylko dla grupy I; w grupie II są tylko zamienione stałe):
Test: 1. 1/3, 2. TTT, 3. $2 + \sqrt{2}$, 4. $F_X(t) \cdot F_Y(t) = (1 - e^{-t})1_{[5,\infty)}(t)$, 5. $2x^3 e^{-x^2} 1_{[0,\infty)}(x)$, 6. $\frac{3}{2}e^{-2}/(1 - e^{-2})$, 7. 1/30, 8. $\frac{1}{2\pi}\exp[-\frac{1}{2}(2x^2 + 2xy + y^2)]$.
Zadania: 1. 6, 2. $\frac{1}{2}e^{-3/2}$, 3. gęstość g dana jest wzorem

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 - t) & \text{dla } t \in (-1, 1), \\ \frac{1}{4}(t + 3) & \text{dla } t \in (-3, -1], \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

4. Wspólny rozkład to $\mathcal{U}([0, 1])$.

Imię i nazwisko:.. .... Numer indeksu:........................

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE
grupa II, 13 grudnia 2008

Część testowa

1. (1pkt) Rzucono dwa razy kostką i w każdym rzucie wypadła nieparzysta liczba oczek. Prawdopodobieństwo tego, że suma oczek wynosi co najmniej 8, jest równe ....

2. (1pkt) Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 4. Wówczas

   a) $2X + 5$ ma rozkład ciągły (T/N).........,

   b) $\mathbb{P}(X > 2|X > 1) < \mathbb{P}(X > 1)$ (T/N).........,

   c) istnieje skończony siódmy moment zmiennej X (T/N)......... .

3. (1pkt) Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem o boku 2. Losujemy pięć punktów P, Q, R, S, T ze zbioru $\{A, B, C, D\}$. Niech X oznacza długość łamanej $PQRST$. Wówczas

   $\mathbb{E}X =$ ....

   Uwaga: $AAAAA$ też jest łamaną, o długości 0.

4. (1pkt) Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkłady o dystrybuantach $F_X(t) = 1_{[3,\infty)}(t)$, $F_Y(t) = (1 - e^{-2t})1_{[0,\infty)}(t)$. Wynika stąd, że zmienna $\max(X, Y)$ ma dystrybuantę

   $F(t) =$.....................

5. (1pkt) Zmienna losowa X ma rozkład $\Gamma(2, 1)$. Gęstość zmiennej $\sqrt[3]{X}$ wynosi

   $g(x) =$............................

6. (1pkt) Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem 2. Wówczas $\mathbb{P}(X + 3Y \le 2|X + Y > 0) =$.........

7. (1pkt) Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$. Wówczas $\mathrm{Cov}(X, XY) =$ ....

8. (1pkt) Zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$
   Wówczas gęstość zmiennej $(X + Y, Y)$ jest równa

   $g(x, y) =$..

Imię i nazwisko:.. .... Numer indeksu:.........................

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE
grupa II, 13 grudnia 2008

Część zadaniowa

1. (2pkt) 26 osób, wśród których są osoby A i B, ustawia się losowo w kolejce. Niech X oznacza liczbę osób stojących między A i B. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.
2. (2pkt) Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona z parametrem 2, a Y ma rozkład geometryczny z parametrem 1/3. Obliczyć $\mathbb{P}(X = Y - 1)$.
3. (2pkt) Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$, a Y ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $X + 2Y$.
4. (2pkt) Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością
$$g(x, y) = \frac{1}{y} 1_{\{0<x\leq y\leq 1\}}.$$
Udowodnić, że zmienne Y, $\frac{X}{Y}$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Co to za rozkład?