Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 2 grudnia 2016r., grupa A

Z poniższych siedmiu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Alicja, jej dwie koleżanki oraz czterech kolegów siadają losowo wokół okrągłego stołu.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kobiety nie będą siedziały obok siebie?

b) Załóżmy, że żadne dwie kobiety nie siedzą obok siebie. Alicja postanawia zamienić się miejscami z kolegą po swojej lewej stronie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po tej zamianie Alicja będzie siedziała obok jednej ze swoich koleżanek.

c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby kolegów siedzących obok Alicji.

2. Pan Kowalski dojeżdża codziennie do swojej pracy na godz. 8:00 samochodem. Trasa przejazdu prowadzi wzdłuż trzech ulic. Pan Kowalski rusza spod domu o godz. 7:30 i w normalnych warunkach dociera do pracy po piętnastu minutach jazdy. Może się jednak zdarzyć, że przy co najmniej jednej z ulic będzie awaria świateł: wystąpienie awarii przy danej ulicy powoduje wydłużenie czasu przejazdu tą ulicą o 10 minut. Awarie przy różnych ulicach występują niezależnie, prawdopodobieństwo pojedynczej awarii wynosi 1/10. Korzystając z twierdzenia Poissona, obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w ciągu 100 kolejnych dni roboczych pan Kowalski spóźni się do pracy co najmniej trzy razy. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

3. Pan Kowalski postanawia ulokować swoje oszczędności w jednym z dwóch funduszy F_1, F_2: wybór funduszu jest losowy (każdy ma tę samą szansę), zaś prawdopodobieństwo, że fundusz po roku zanotuje zysk, wynosi odpowiednio 97% dla F_1 i 98% dla F_2.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że po roku pan Kowalski zwiększy swój kapitał.

b) Załóżmy, że pan Kowalski po roku zwiększył swój kapitał. Zachęcony tym wynikiem, postanawia lokować swe oszczędności w tym samym funduszu przez pięć kolejnych lat. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w co najmniej dwóch spośród tych pięciu lat pan Kowalski zanotuje zysk (liczony w stosunku do roku poprzedniego)? Zakładamy, że wyniki funduszy są niezależne w poszczególnych latach, a prawdopodobieństwa odnotowania przez nie zysku pozostają niezmienione.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[1, 2]$.

a) Wyznaczyć wariancję zmiennej $Y = \frac{1}{3+X}$.

b) Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu zmiennej Y. Czy ta zmienna ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić.

5. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 2, \\ \frac{1}{2}t - 1 & \text{jeśli } 2 \leq t < 3, \\ \frac{3}{4} & \text{jeśli } 3 \leq t < 5, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 5. \end{cases}$$

Obliczyć kwantyl rzędu $\frac{1}{5}$ rozkładu X oraz prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(2^X > 8 | X \in [2, 4])$.

6. Rozkład zmiennej X ma gęstość $g(x) = cx\mathbb{1}_{[1,3]}(x)$, a rozkład Y zadany jest przez równości $\mathbb{P}(Y = k) = ak$, $k \in \{1, 3, 4\}$. Obliczyć a, c oraz rozstrzygnąć, która ze zmiennych ma większą wariancję.

7. Czas trwania pojedynczej piosenki (liczony w minutach) ma rozkład wykładniczy z parametrem 1/3. Podczas emisji w danej stacji radiowej, piosenkę ucina się po trzech minutach jeśli trwa dłużej. Wyznaczyć wartość oczekiwaną łącznego czasu emisji 20 różnych piosenek w tej stacji.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 2 grudnia 2016r., grupa B

Z poniższych siedmiu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Alicja, jej trzy koleżanki oraz pięciu kolegów siadają losowo wokół okrągłego stołu.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kobiety nie będą siedziały obok siebie?

b) Załóżmy, że żadne dwie kobiety nie siedzą obok siebie. Alicja postanawia zamienić się miejscami z kolegą po swojej lewej stronie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po tej zamianie Alicja będzie siedziała obok jednej ze swoich koleżanek.

c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby kolegów siedzących obok Alicji.

2. Pan Kowalski dojeżdża codziennie do swojej pracy na godz. 9:00 samochodem. Trasa przejazdu prowadzi wzdłuż trzech ulic. Pan Kowalski rusza spod domu o godz. 8:30 i w normalnych warunkach dociera do pracy po piętnastu minutach jazdy. Może się jednak zdarzyć, że przy co najmniej jednej z ulic będzie awaria świateł: wystąpienie awarii przy danej ulicy powoduje wydłużenie czasu przejazdu tą ulicą o 10 minut. Awarie przy różnych ulicach występują niezależnie, prawdopodobieństwo pojedynczej awarii wynosi 1/20. Korzystając z twierdzenia Poissona, obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w ciągu 200 kolejnych dni roboczych pan Kowalski spóźni się do pracy co najmniej cztery razy. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

3. Pan Kowalski postanawia ulokować swoje oszczędności w jednym z dwóch funduszy F_1, F_2: wybór funduszu jest losowy (każdy ma tę samą szansę), zaś prawdopodobieństwo, że fundusz po roku zanotuje zysk, wynosi odpowiednio 97% dla F_1 i 99% dla F_2.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że po roku pan Kowalski zwiększy swój kapitał.

b) Załóżmy, że pan Kowalski po roku zwiększył swój kapitał. Zachęcony tym wynikiem, postanawia lokować swe oszczędności w tym samym funduszu przez pięć kolejnych lat. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w co najmniej dwóch spośród tych pięciu lat pan Kowalski zanotuje zysk (liczony w stosunku do roku poprzedniego)? Zakładamy, że wyniki funduszy są niezależne w poszczególnych latach, a prawdopodobieństwa odnotowania przez nie zysku pozostają niezmienione.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[2, 3]$.

a) Wyznaczyć wariancję zmiennej $Y = \frac{1}{1+X}$.

b) Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu zmiennej Y. Czy ta zmienna ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić.

5. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 3, \\ \frac{1}{3}t - 1 & \text{jeśli } 3 \leq t < 4, \\ \frac{2}{3} & \text{jeśli } 4 \leq t < 6, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 6. \end{cases}$$

Obliczyć kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$ rozkładu X oraz prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(2^X > 16 | X \in [3, 5])$.

6. Rozkład zmiennej X ma gęstość $g(x) = cx\mathbb{1}_{[0,4]}(x)$, a rozkład Y zadany jest przez równości $\mathbb{P}(Y = k) = ak$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Obliczyć a, c oraz rozstrzygnąć, która ze zmiennych ma większą wariancję.

7. Czas trwania pojedynczej piosenki (liczony w minutach) ma rozkład wykładniczy z parametrem 1/4. Podczas emisji w danej stacji radiowej, piosenkę ucina się po trzech minutach jeśli trwa dłużej. Wyznaczyć wartość oczekiwaną łącznego czasu emisji 30 różnych piosenek w tej stacji.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 2 grudnia 2016r., grupa C

Z poniższych siedmiu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Alicja, jej dwie koleżanki oraz czterech kolegów siadają losowo wokół okrągłego stołu.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kobiety nie będą siedziały obok siebie?

b) Załóżmy, że żadne dwie kobiety nie siedzą obok siebie. Alicja postanawia zamienić się miejscami z kolegą po swojej lewej stronie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po tej zamianie Alicja nadal będzie siedziała między dwoma kolegami.

c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby koleżanek siedzących obok Alicji.

2. Pan Kowalski dojeżdża codziennie do swojej pracy na godz. 8:00 samochodem. Trasa przejazdu prowadzi wzdłuż trzech ulic. Pan Kowalski rusza spod domu o godz. 7:00 i w normalnych warunkach dociera do pracy po pół godziny jazdy. Może się jednak zdarzyć, że przy co najmniej jednej z ulic będzie awaria świateł: wystąpienie awarii przy danej ulicy powoduje wydłużenie czasu przejazdu tą ulicą o 20 minut. Awarie przy różnych ulicach występują niezależnie, prawdopodobieństwo pojedynczej awarii wynosi 1/10. Korzystając z twierdzenia Poissona, obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w ciągu 200 kolejnych dni roboczych pan Kowalski spóźni się do pracy co najwyżej trzy razy. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

3. Pan Kowalski postanawia ulokować swoje oszczędności w jednym z dwóch funduszy F_1, F_2: wybór funduszu jest losowy (każdy ma tę samą szansę), zaś prawdopodobieństwo, że fundusz po roku zanotuje zysk, wynosi odpowiednio 98% dla F_1 i 99% dla F_2.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że po roku pan Kowalski zwiększy swój kapitał.

b) Załóżmy, że pan Kowalski po roku zwiększył swój kapitał. Zachęcony tym wynikiem, postanawia lokować swe oszczędności w tym samym funduszu przez sześć kolejnych lat. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w co najmniej dwóch spośród tych sześciu lat pan Kowalski zanotuje zysk (liczony w stosunku do roku poprzedniego)? Zakładamy, że wyniki funduszy są niezależne w poszczególnych latach, a prawdopodobieństwa odnotowania przez nie zysku pozostają niezmienione.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[1, 2]$.

a) Wyznaczyć wariancję zmiennej $Y = \frac{1}{2+X}$.

b) Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu zmiennej Y. Czy ta zmienna ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić.

5. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 2, \\ \frac{1}{2}t - 1 & \text{jeśli } 2 \leq t < 3, \\ \frac{2}{3} & \text{jeśli } 3 \leq t < 6, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 6. \end{cases}$$

Obliczyć kwantyl rzędu $\frac{1}{3}$ rozkładu X oraz prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(3^X > 27 | X \in [2, 5])$.

6. Rozkład zmiennej X ma gęstość $g(x) = cx\mathbb{1}_{[2,4]}(x)$, a rozkład Y zadany jest przez równości $\mathbb{P}(Y = k) = ak$, $k \in \{1, 2, 4\}$. Obliczyć a, c oraz rozstrzygnąć, która ze zmiennych ma większą wariancję.

7. Czas trwania pojedynczej piosenki (liczony w minutach) ma rozkład wykładniczy z parametrem 1/3. Podczas emisji w danej stacji radiowej, piosenkę ucina się po czterech minutach jeśli trwa dłużej. Wyznaczyć wartość oczekiwaną łącznego czasu emisji 20 różnych piosenek w tej stacji.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 2 grudnia 2016r., grupa D

Z poniższych siedmiu zadań należy wybrać pięć. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Alicja, jej trzy koleżanki oraz pięciu kolegów siadają losowo wokół okrągłego stołu.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie kobiety nie będą siedziały obok siebie?

b) Załóżmy, że żadne dwie kobiety nie siedzą obok siebie. Alicja postanawia zamienić się miejscami z kolegą po swojej lewej stronie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po tej zamianie Alicja nadal będzie siedziała między dwoma kolegami.

c) Obliczyć wartość oczekiwaną liczby koleżanek siedzących obok Alicji.

2. Pan Kowalski dojeżdża codziennie do swojej pracy na godz. 9:00 samochodem. Trasa przejazdu prowadzi wzdłuż trzech ulic. Pan Kowalski rusza spod domu o godz. 8:00 i w normalnych warunkach dociera do pracy po pół godziny jazdy. Może się jednak zdarzyć, że przy co najmniej jednej z ulic będzie awaria świateł: wystąpienie awarii przy danej ulicy powoduje wydłużenie czasu przejazdu tą ulicą o 20 minut. Awarie przy różnych ulicach występują niezależnie, prawdopodobieństwo pojedynczej awarii wynosi 1/20. Korzystając z twierdzenia Poissona, obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w ciągu 100 kolejnych dni roboczych pan Kowalski spóźni się do pracy co najmniej trzy razy. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

3. Pan Kowalski postanawia ulokować swoje oszczędności w jednym z dwóch funduszy F_1, F_2: wybór funduszu jest losowy (każdy ma tę samą szansę), zaś prawdopodobieństwo, że fundusz po roku zanotuje zysk, wynosi odpowiednio 96% dla F_1 i 98% dla F_2.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że po roku pan Kowalski zwiększy swój kapitał.

b) Załóżmy, że pan Kowalski po roku zwiększył swój kapitał. Zachęcony tym wynikiem, postanawia lokować swe oszczędności w tym samym funduszu przez sześć kolejnych lat. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w co najmniej dwóch spośród tych sześciu lat pan Kowalski zanotuje zysk (liczony w stosunku do roku poprzedniego)? Zakładamy, że wyniki funduszy są niezależne w poszczególnych latach, a prawdopodobieństwa odnotowania przez nie zysku pozostają niezmienione.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $[2, 3]$.

a) Wyznaczyć wariancję zmiennej $Y = \frac{1}{2+X}$.

b) Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu zmiennej Y. Czy ta zmienna ma rozkład ciągły? Odpowiedź uzasadnić.

5. Zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 3, \\ \frac{1}{3}t - 1 & \text{jeśli } 3 \leq t < 5, \\ \frac{3}{4} & \text{jeśli } 5 \leq t < 7, \\ 1 & \text{jeśli } t \geq 7. \end{cases}$$

Obliczyć kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$ rozkładu X oraz prawdopodobieństwo warunkowe $\mathbb{P}(2^X > 16 | X \in [3, 6])$.

6. Rozkład zmiennej X ma gęstość $g(x) = cx\mathbb{1}_{[0,2]}(x)$, a rozkład Y zadany jest przez równości $\mathbb{P}(Y = k) = ak$, $k \in \{2, 3, 4\}$. Obliczyć a, c oraz rozstrzygnąć, która ze zmiennych ma większą wariancję.

7. Czas trwania pojedynczej piosenki (liczony w minutach) ma rozkład wykładniczy z parametrem 1/4. Podczas emisji w danej stacji radiowej, piosenkę ucina się po czterech minutach jeśli trwa dłużej. Wyznaczyć wartość oczekiwaną łącznego czasu emisji 30 różnych piosenek w tej stacji.