

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 4.12.2015
grupa A

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Bartek ma 2 złote, a Adam ma 1 złotówkę. Napój w automacie kosztuje 3 zł, ale Adam i Bartek nie mogą dojść do porozumienia który smak wybrać. Ustalili więc następujący schemat: rzucają monetą i jeśli wypadnie orzeł, to Adam przekazuje Bartkowi złotówkę, zaś jeśli reszka – Bartek przekazuje złotówkę Adamowi. Kto pierwszy będzie miał 3 złote, wygrywa i decyduje o rodzaju napoju. Do końca przerwy zostało niewiele czasu – na co najwyżej 5 rzutów monetą. Oblicz prawdopodobieństwa, że do końca przerwy (a) wygra Adam, (b) wygra Bartek, (c) wygra Adam, pod warunkiem, że nastąpiło rozstrzygnięcie. ★ Oblicz prawdopodobieństwo, że to Adam będzie wybierał jeśli gra nie ma ograniczenia czasowego.
2. Sklep sieci A&B testuje trzy strategie zniżek: pierwszą dla 30% losowo wybranych klientów, drugą również dla 30% klientów, a trzecią dla pozostałych. Okazało się, że osoby, które objęte były pierwszym programem rabatowym, dokonują ponownego zakupu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, osoby objęte drugim programem – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$, zaś osoby z trzeciego programu – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$.
 - (a) Klient dokonał ponownego zakupu. Jaka jest szansa, że objęty był trzecim programem rabatowym?
 - (b) Każdy klient wracający do sklepu zostaje ponownie objęty jedną z trzech strategii, niezależnie od poprzedniego przypisania. Pewien klient dwukrotnie powrócił do sklepu. Jaka jest szansa, że dwukrotnie był objęty strategią typu 3?
3. Pewna firma obsługuje dziennie telefony od 320 klientów. Klienci mogą zadzwonić do infolinii w dowolnej losowo wybranej minucie w ciągu doby. Wiadomo, że średnio rozmowy klienta z infolinią trwają 4,5 minuty na dobę. Jaka jest mniej więcej szansa, że jeśli na infolinii zatrudnione są dwie osoby, to o godzinie 9:00 nie zabraknie wolnego połączenia dla klientów firmy? Ile należy przygotować stanowisk obsługi aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 (w przybliżeniu) nie zabrakło wolnych połączeń dla klientów firmy?
Wskazówka: $e^{-4,5/320} \approx 0,99$ $e^{-1} \approx 0,37$ $e^{-2} \approx 0,14$ $e^{-4,5} \approx 0,01$
4. Cena P akcji pewnej spółki giełdowej jest zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[18, 22]$. Inwestor ma do wyboru dwa instrumenty: A, dla którego zysk (zależny od ceny akcji spółki) wynosi $\frac{P-20}{2}$ i B, dla którego zysk wyraża się wzorem $\frac{(P-20)^3}{8}$. (a) Wyznaczyć rozkłady zysku dla instrumentów A i B. (b) W który z instrumentów (A czy B) zainwestowałby inwestor z awersją do ryzyka kierujący się wariancją rozkładu?
5. Załóżmy, że zmienna losowa X opisująca długość życia w pewnej populacji spełnia następujące warunki

$$\mathbf{P}(X > t) = \begin{cases} \exp(-(t - 100)) & \text{dla } t > 120 \\ \exp(-\frac{t-80}{2}) & \text{dla } 90 < t \leq 120 \\ \exp(-\frac{t-65}{5}) & \text{dla } 70 < t \leq 90 \\ \exp(-\frac{t}{70}) & \text{dla } 0 \leq t \leq 70 \end{cases}$$

- (a) Czy zmienna X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym? Odpowiedź uzasadnij.
 - (b) Oblicz średnią długość życia w badanej populacji.
 - (c) Oblicz medianę długości życia w badanej populacji. *Wskazówka:* zob. wskazówkę zad 3
6. Miesięczna liczba transakcji, w których uczestniczy pośrednik agencji nieruchomości przed szkoleniem jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 3 i $\frac{1}{4}$, dla pośrednika po szkoleniu typu standard – zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 4 i $\frac{1}{4}$, a dla pośrednika po szkoleniu typu extra – zmienną losową będącą kwadratem liczby transakcji pośrednika bez szkolenia. (a) Wyznaczyć średnią i wariancję dla miesięcznej liczby transakcji pracownika po szkoleniu typu extra. (b) Co się bardziej opłaca z punktu widzenia średniej liczby transakcji zawieranych przez agencję, która przyjęła do pracy cztery nieprzeszkolone osoby: wysłać wszystkich nowych pracowników na szkolenie standardowe, czy dwóch na szkolenie typu extra?

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 4.12.2015
grupa B

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Bartek ma 2 złote, a Adam ma 1 złotówkę. Napój w automacie kosztuje 3 zł, ale Adam i Bartek nie mogą dojść do porozumienia który smak wybrać. Ustalili więc następujący schemat: rzucają monetą i jeśli wypadnie orzeł, to Adam przekazuje Bartkowi złotówkę, zaś jeśli reszka – Bartek przekazuje złotówkę Adamowi. Kto pierwszy będzie miał 3 złote, wygrywa i decyduje o rodzaju napoju. Do końca przerwy zostało niewiele czasu – na co najwyżej 6 rzutów monetą. Oblicz prawdopodobieństwa, że do końca przerwy (a) wygra Adam, (b) wygra Bartek, (c) wygra Adam, pod warunkiem, że nastąpiło rozstrzygnięcie. ★ Oblicz prawdopodobieństwo, że to Adam będzie wybierał jeśli gra nie ma ograniczenia czasowego.
2. Sklep sieci A&B testuje trzy strategie zniżek: pierwszą dla 20% losowo wybranych klientów, drugą dla 30% klientów, a trzecią dla pozostałych. Okazało się, że osoby, które objęte były pierwszym programem rabatowym, dokonują ponownego zakupu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, osoby objęte drugim programem – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$, zaś osoby z trzeciego programu – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$.
 - (a) Klient dokonał ponownego zakupu. Jaka jest szansa, że objęty był pierwszym programem rabatowym?
 - (b) Każdy klient wracający do sklepu zostaje ponownie objęty jedną z trzech strategii, niezależnie od poprzedniego przypisania. Pewien klient dwukrotnie powrócił do sklepu. Jaka jest szansa, że dwukrotnie był objęty strategią typu 1?
3. Pewna firma obsługuje dziennie telefony od 640 klientów. Klienci mogą zadzwonić do infolinii w dowolnej losowo wybranej minucie w ciągu doby. Wiadomo, że średnio rozmowy klienta z infolinią trwają 4,5 minuty na dobę. Jaka jest mniej więcej szansa, że jeśli na infolinii zatrudnione są dwie osoby, to o godzinie 11:00 nie zabraknie wolnego połączenia dla klientów firmy? Ile należy przygotować stanowisk obsługi aby prawdopodobieństwo, że zabraknie wolnych połączeń dla klientów tej firmy było (w przybliżeniu) nie większe niż 0,05?

Wskazówka: $e^{-4,5/640} \approx 0,99$ $e^{-1} \approx 0,37$ $e^{-2} \approx 0,14$ $e^{-4,5} \approx 0,01$
4. Cena P akcji pewnej spółki giełdowej jest zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[18, 24]$. Inwestor ma do wyboru dwa instrumenty: A, dla którego zysk (zależny od ceny akcji spółki) wynosi $\frac{P-21}{3}$ i B, dla którego zysk wyraża się wzorem $\frac{(P-21)^5}{243}$. (a) Wyznaczyć rozkłady zysku dla instrumentów A i B. (b) W który z instrumentów (A czy B) zainwestowałby inwestor lubiący większe ryzyko kierujący się wariancją rozkładu?
5. Załóżmy, że zmienna losowa X opisująca długość życia w pewnej populacji spełnia następujące warunki

$$\mathbf{P}(X > t) = \begin{cases} \exp(-(t - 95)) & \text{dla } t > 120 \\ \exp(-\frac{t-70}{2}) & \text{dla } 80 < t \leq 120 \\ \exp(-\frac{t-55}{5}) & \text{dla } 60 < t \leq 80 \\ \exp(-\frac{t}{60}) & \text{dla } 0 \leq t \leq 60 \end{cases}$$

- (a) Czy zmienna X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym? Odpowiedź uzasadnij.
 - (b) Oblicz średnią długość życia w badanej populacji.
 - (c) Oblicz medianę długości życia w badanej populacji. *Wskazówka:* zob. wskazówkę zad 3
6. Miesięczna liczba transakcji, w których uczestniczy pośrednik agencji nieruchomości przed szkoleniem jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 4 i $\frac{1}{4}$, dla pośrednika po szkoleniu typu standard – zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 6 i $\frac{1}{4}$, a dla pośrednika po szkoleniu typu extra – zmienną losową będącą kwadratem liczby transakcji pośrednika bez szkolenia. (a) Wyznaczyć średnią i wariancję dla miesięcznej liczby transakcji pracownika po szkoleniu typu extra. (b) Co się bardziej opłaca z punktu widzenia średniej liczby transakcji zawieranych przez agencję, która przyjęła do pracy cztery nieprzeszkolone osoby: wysłać wszystkich nowych pracowników na szkolenie standardowe, czy dwóch na szkolenie typu extra?

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 4.12.2015
grupa C

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Adam ma 2 złote, a Bartek ma 1 złotówkę. Napój w automacie kosztuje 3 zł, ale Adam i Bartek nie mogą dojść do porozumienia który smak wybrać. Ustalili więc następujący schemat: rzucają monetą i jeśli wypadnie orzeł, to Adam przekazuje Bartkowi złotówkę, zaś jeśli reszka – Bartek przekazuje złotówkę Adamowi. Kto pierwszy będzie miał 3 złote, wygrywa i decyduje o rodzaju napoju. Do końca przerwy zostało niewiele czasu – na co najwyżej 5 rzutów monetą. Oblicz prawdopodobieństwa, że do końca przerwy (a) wygra Adam, (b) wygra Bartek, (c) wygra Adam, pod warunkiem, że nastąpiło rozstrzygnięcie. ★ Oblicz prawdopodobieństwo, że to Adam będzie wybierał jeśli gra nie ma ograniczenia czasowego.
2. Sklep sieci A&B testuje trzy strategie zniżek: pierwszą dla 40% losowo wybranych klientów, drugą dla 30% klientów, a trzecią dla pozostałych. Okazało się, że osoby, które objęte były pierwszym programem rabatowym, dokonują ponownego zakupu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, osoby objęte drugim programem – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, zaś osoby z trzeciego programu – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$.
 - (a) Klient dokonał ponownego zakupu. Jaka jest szansa, że objęty był pierwszym programem rabatowym?
 - (b) Każdy klient wracający do sklepu zostaje ponownie objęty jedną z trzech strategii, niezależnie od poprzedniego przypisania. Pewien klient dwukrotnie powrócił do sklepu. Jaka jest szansa, że dwukrotnie był objęty strategią typu 1?
3. Pewna firma obsługuje dziennie telefony od 320 klientów. Klienci mogą zadzwonić do infolinii w dowolnej losowo wybranej minucie w ciągu doby. Wiadomo, że średnio rozmowy klienta z infolinią trwają 9 minut na dobę. Jaka jest mniej więcej szansa, że jeśli na infolinii zatrudnione są dwie osoby, to o godzinie 10:00 nie zabraknie wolnego połączenia dla klientów firmy? Ile należy przygotować stanowisk obsługi aby prawdopodobieństwo, że zabraknie wolnych połączeń dla klientów tej firmy było (w przybliżeniu) nie większe niż 0,05?
Wskazówka: $e^{-9/320} \approx 0,99$ $e^{-1} \approx 0,37$ $e^{-2} \approx 0,14$ $e^{-9} \approx 0,0001$
4. Cena P akcji pewnej spółki giełdowej jest zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[17, 21]$. Inwestor ma do wyboru dwa instrumenty: A, dla którego zysk (zależny od ceny akcji spółki) wynosi $\frac{P-19}{2}$ i B, dla którego zysk wyraża się wzorem $\frac{(P-19)^5}{32}$. (a) Wyznaczyć rozkłady zysku dla instrumentów A i B. (b) W który z instrumentów (A czy B) zainwestowałby inwestor lubiący większe ryzyko kierujący się wariancją rozkładu?
5. Załóżmy, że zmienna losowa X opisująca długość życia w pewnej populacji spełnia następujące warunki

$$\mathbf{P}(X > t) = \begin{cases} \exp(-(t - 105)) & \text{dla } t > 120 \\ \exp(-\frac{t-90}{2}) & \text{dla } 100 < t \leq 120 \\ \exp(-\frac{t-75}{5}) & \text{dla } 80 < t \leq 100 \\ \exp(-\frac{t}{80}) & \text{dla } 0 \leq t \leq 80 \end{cases}$$

- (a) Czy zmienna X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym? Odpowiedź uzasadnij.
 - (b) Oblicz średnią długość życia w badanej populacji.
 - (c) Oblicz medianę długości życia w badanej populacji. *Wskazówka:* zob. wskazówkę zad 3
6. Miesięczna liczba transakcji, w których uczestniczy pośrednik agencji nieruchomości przed szkoleniem jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 3 i $\frac{1}{3}$, dla pośrednika po szkoleniu typu standard – zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 8 i $\frac{1}{6}$, a dla pośrednika po szkoleniu typu extra – zmienną losową będącą kwadratem liczby transakcji pośrednika bez szkolenia. (a) Wyznaczyć średnią i wariancję dla miesięcznej liczby transakcji pracownika po szkoleniu typu extra. (b) Co się bardziej opłaca z punktu widzenia średniej liczby transakcji zawieranych przez agencję, która przyjęła do pracy cztery nieprzeszkolone osoby: wysłać wszystkich nowych pracowników na szkolenie standardowe, czy dwóch na szkolenie typu extra?

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 4.12.2015
grupa D

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Adam ma 2 złote, a Bartek ma 1 złotówkę. Napój w automacie kosztuje 3 zł, ale Adam i Bartek nie mogą dojść do porozumienia który smak wybrać. Ustalili więc następujący schemat: rzucają monetą i jeśli wypadnie orzeł, to Adam przekazuje Bartkowi złotówkę, zaś jeśli reszka – Bartek przekazuje złotówkę Adamowi. Kto pierwszy będzie miał 3 złote, wygrywa i decyduje o rodzaju napoju. Do końca przerwy zostało niewiele czasu – na co najwyżej 6 rzutów monetą. Oblicz prawdopodobieństwa, że do końca przerwy (a) wygra Adam, (b) wygra Bartek, (c) wygra Adam, pod warunkiem, że nastąpiło rozstrzygnięcie. ★ Oblicz prawdopodobieństwo, że to Adam będzie wybierał jeśli gra nie ma ograniczenia czasowego.
2. Sklep sieci A&B testuje trzy strategie zniżek: pierwszą dla 50% losowo wybranych klientów, drugą dla 30% klientów, a trzecią dla pozostałych. Okazało się, że osoby, które objęte były pierwszym programem rabatowym, dokonują ponownego zakupu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, osoby objęte drugim programem – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{5}$, zaś osoby z trzeciego programu – z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$.
 - (a) Klient dokonał ponownego zakupu. Jaka jest szansa, że objęty był trzecim programem rabatowym?
 - (b) Każdy klient wracający do sklepu zostaje ponownie objęty jedną z trzech strategii, niezależnie od poprzedniego przypisania. Pewien klient dwukrotnie powrócił do sklepu. Jaka jest szansa, że dwukrotnie był objęty strategią typu 3?
3. Pewna firma obsługuje dziennie telefony od 160 klientów. Klienci mogą zadzwonić do infolinii w dowolnej losowo wybranej minucie w ciągu doby. Wiadomo, że średnio rozmowy klienta z infolinią trwają 9 minut na dobę. Jaka jest mniej więcej szansa, że jeśli na infolinii zatrudnione są dwie osoby, to o godzinie 12:00 nie zabraknie wolnego połączenia dla klientów firmy? Ile należy przygotować stanowisk obsługi aby z prawdopodobieństwem co najmniej 0,95 (w przybliżeniu) nie zabrakło wolnych połączeń dla klientów firmy?
Wskazówka: $e^{-9/160} \approx 0,99$ $e^{-1} \approx 0,37$ $e^{-2} \approx 0,14$ $e^{-9} \approx 0,0001$
4. Cena P akcji pewnej spółki giełdowej jest zmienną losową z rozkładu jednostajnego na przedziale $[15, 21]$. Inwestor ma do wyboru dwa instrumenty: A, dla którego zysk (zależny od ceny akcji spółki) wynosi $\frac{P-18}{3}$ i B, dla którego zysk wyraża się wzorem $\frac{(P-18)^3}{27}$. (a) Wyznaczyć rozkłady zysku dla instrumentów A i B. (b) W który z instrumentów (A czy B) zainwestowałby inwestor z awersją do ryzyka kierujący się wariancją rozkładu?
5. Załóżmy, że zmienna losowa X opisująca długość życia w pewnej populacji spełnia następujące warunki

$$\mathbf{P}(X > t) = \begin{cases} \exp(-(t - 105)) & \text{dla } t > 125 \\ \exp(-\frac{t-85}{2}) & \text{dla } 95 < t \leq 125 \\ \exp(-\frac{t-70}{5}) & \text{dla } 75 < t \leq 95 \\ \exp(-\frac{t}{75}) & \text{dla } 0 \leq t \leq 75 \end{cases}$$

- (a) Czy zmienna X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym? Odpowiedź uzasadnij.
 - (b) Oblicz średnią długość życia w badanej populacji.
 - (c) Oblicz medianę długości życia w badanej populacji. *Wskazówka:* zob. wskazówkę zad 3
6. Miesięczna liczba transakcji, w których uczestniczy pośrednik agencji nieruchomości przed szkoleniem jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 4 i $\frac{1}{3}$, dla pośrednika po szkoleniu typu standard – zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 7 i $\frac{1}{3}$, a dla pośrednika po szkoleniu typu extra – zmienną losową będącą kwadratem liczby transakcji pośrednika bez szkolenia. (a) Wyznaczyć średnią i wariancję dla miesięcznej liczby transakcji pracownika po szkoleniu typu extra. (b) Co się bardziej opłaca z punktu widzenia średniej liczby transakcji zawieranych przez agencję, która przyjęła do pracy cztery nieprzeszkolone osoby: wysłać wszystkich nowych pracowników na szkolenie standardowe, czy dwóch na szkolenie typu extra?