

## Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5.12.2014

### grupa A

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

- Rzucono symetryczną monetą 9 razy i zaobserwowano, że orzeł wypadł dokładnie 4 razy. W takiej sytuacji, jakie jest prawdopodobieństwo, że
  - przynajmniej raz orzeł wypadł w dwóch następujących po sobie rzutach (tj. dwa lub więcej razy z rzędu)?
  - orzeł wypadł 4 razy z rzędu?
- Od pewnego czasu cena baryłki ropy na giełdzie zachowuje się w następujący sposób: każdego dnia cena spada o \$1 z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$ , a wzrasta o \$1 z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$ . Dodatkowo wahania ceny ropy w poszczególnych dniach są niezależne.
  - Oblicz prawdopodobieństwo, że po pięciu dniach notowań cena ropy spadnie o \$1.
  - Oblicz prawdopodobieństwo, że po pięciu dniach notowań cena ropy wzrośnie o \$1, jeśli wiadomo, że po pierwszych dwóch dniach cena nie uległa zmianie.
  - Czy zdarzenia, o których mowa w punkcie (b), tj.: *po pięciu dniach cena ropy wzrosła o \$1 oraz w ciągu pierwszych dwóch dni cena nie uległa zmianie*, są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!
- Pewien ośrodek badawczy zajmujący się kondycją polskich firm rozesłał ankiety do losowo wybranych 300 małych i 100 dużych przedsiębiorstw figurujących w rejestrze (stan sprzed roku). Według danych urzędu statystycznego, w ostatnim roku 0,2% małych firm i 0,5% dużych firm ogłosiło upadłość. Korzystając z twierdzenia Poissona, podać
  - przybliżenie prawdopodobieństwa, że dokładnie jedna z ankietowanych firm w ostatnim roku ogłosiła upadłość;
  - przybliżenie prawdopodobieństwa, że jeśli dokładnie jedna z ankietowanych firm ogłosiła upadłość, to zdarzenie to dotyczy małej firmy.
- Niech  $X$  będzie zmienną losową z rozkładu o gęstości  $g(x) = ce^{-2x}\mathbf{1}_{[0, \ln 5]}(x)$ , zaś  $Y = e^{2X}$ . Wyznaczyć:
  - Stałą  $c$ ;
  - $\mathbb{P}(Y \in [1, 25])$ ;
  - Rozkład zmiennej  $Y$ . Czy  $Y$  ma rozkład ciągły? Uzasadnić i jeśli tak, podać gęstość.
  - Wartość oczekiwaną zmiennej  $Y$ .
- Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[-3, 3]$ , zaś  $Y = X^2$  a  $Z = 3X^2 + 2$ . Wyznaczyć:
  - Rozkład zmiennej  $Y$ ;
  - Wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych  $Y$  i  $Z$ .
- Towarzystwo ubezpieczeniowe sprzedało 1000 rocznych polis komunikacyjnych. Pojedyncza polisa jest bezszkodowa z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ , z jedną szkodą z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$ , a z dwoma szkodami z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{6}$ .
  - Wyznaczyć średnią liczbę szkód, jakiej może się spodziewać towarzystwo ubezpieczeniowe w ciągu roku ze wszystkich polis.
  - Przy dodatkowym założeniu, że rozkład wartości wypłaty dla pojedynczej szkody jest rozkładem o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 100 \\ \frac{t}{2000} & t \in [100, 1000) \\ 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{10^4}\right)^2 & t \in [1000, 10000) \\ 1 & t \geq 10^4 \end{cases}$$

wyznaczyć średnią i medianę wartości jednej szkody oraz średnią wartość wypłaty ze wszystkich polis.

## Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5.12.2014

### grupa B

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

- Rzucono symetryczną monetą 11 razy i zaobserwowano, że orzeł wypadł dokładnie 5 razy. W takiej sytuacji, jakie jest prawdopodobieństwo, że
  - przynajmniej raz orzeł wypadł w dwóch następujących po sobie rzutach (tj. dwa lub więcej razy z rzędu)?
  - orzeł wypadł 5 razy z rzędu?
- Od pewnego czasu cena baryłki ropy na giełdzie zachowuje się w następujący sposób: każdego dnia cena spada o \$1 z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$ , a wzrasta o \$1 z prawdopodobieństwem  $\frac{3}{4}$ . Dodatkowo wahania ceny ropy w poszczególnych dniach są niezależne.
  - Oblicz prawdopodobieństwo, że po pięciu dniach notowań cena ropy wzrośnie o \$1.
  - Oblicz prawdopodobieństwo, że po pięciu dniach notowań cena ropy spadnie o \$1, jeśli wiadomo, że po pierwszych dwóch dniach cena nie uległa zmianie.
  - Czy zdarzenia, o których mowa w punkcie (b), tj.: *po pięciu dniach cena ropy spadła o \$1 oraz w ciągu pierwszych dwóch dni cena nie uległa zmianie*, są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!
- Pewien ośrodek badawczy zajmujący się kondycją polskich firm rozesłał ankiety do losowo wybranych 400 małych i 200 dużych przedsiębiorstw figurujących w rejestrze (stan sprzed roku). Według danych urzędu statystycznego, w ostatnim roku 0,3% małych firm i 0,4% dużych firm ogłosiło upadłość. Korzystając z twierdzenia Poissona, podać
  - przybliżenie prawdopodobieństwa, że dokładnie jedna z ankietowanych firm w ostatnim roku ogłosiła upadłość;
  - przybliżenie prawdopodobieństwa, że jeśli dokładnie jedna z ankietowanych firm ogłosiła upadłość, to zdarzenie to dotyczy dużej firmy.
- Niech  $X$  będzie zmienną losową z rozkładu o gęstości  $g(x) = ce^{-x}\mathbf{1}_{[0, \ln 10]}(x)$ , zaś  $Y = e^X$ . Wyznaczyć:
  - Stałą  $c$ ;
  - $\mathbb{P}(Y \in [1, 10])$ ;
  - Rozkład zmiennej  $Y$ . Czy  $Y$  ma rozkład ciągły? Uzasadnić i jeśli tak, podać gęstość.
  - Wartość oczekiwaną zmiennej  $Y$ .
- Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[-2, 2]$ , zaś  $Y = X^4$  a  $Z = 2X^4 - 1$ . Wyznaczyć:
  - Rozkład zmiennej  $Y$ ;
  - Wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych  $Y$  i  $Z$ .
- Towarzystwo ubezpieczeniowe sprzedało 10 000 rocznych polis komunikacyjnych. Pojedyncza polisa jest bezskodowa z prawdopodobieństwem  $\frac{3}{4}$ , z jedną szkodą z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{8}$ , a z dwoma szkodami z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{8}$ .
  - Wyznaczyć średnią liczbę szkód, jakiej może się spodziewać towarzystwo ubezpieczeniowe w ciągu roku ze wszystkich polis.
  - Przy dodatkowym założeniu, że rozkład wartości wypłaty dla pojedynczej szkody jest rozkładem o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 200 \\ \frac{t}{4000} & t \in [200, 2000) \\ 1 - \frac{2}{5} \left(1 - \frac{t}{10^4}\right)^2 & t \in [2000, 10000) \\ 1 & t \geq 10^4 \end{cases}$$

wyznaczyć średnią i medianę wartości jednej szkody oraz średnią wartość wypłaty ze wszystkich polis.

**Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5.12.2014**  
**grupa C**

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

1. Rzucono symetryczną monetą 9 razy i zaobserwowano, że orzeł wypadł dokładnie 5 razy. W takiej sytuacji, jakie jest prawdopodobieństwo, że
  - (a) przynajmniej raz orzeł wypadł w dwóch następujących po sobie rzutach (tj. dwa lub więcej razy z rzędu)?
  - (b) orzeł wypadł 5 razy z rzędu?
2. Od pewnego czasu cena baryłki ropy na giełdzie zachowuje się w następujący sposób: każdego dnia cena spada o \$1 z prawdopodobieństwem  $\frac{3}{4}$ , a wzrasta o \$1 z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$ . Dodatkowo wahania ceny ropy w poszczególnych dniach są niezależne.
  - (a) Oblicz prawdopodobieństwo, że po pięciu dniach notowań cena ropy spadnie o \$1.
  - (b) Oblicz prawdopodobieństwo, że po pięciu dniach notowań cena ropy wzrośnie o \$1, jeśli wiadomo, że po pierwszych dwóch dniach cena nie uległa zmianie.
  - (c) Czy zdarzenia, o których mowa w punkcie (b), tj.: *po pięciu dniach cena ropy wzrosła o \$1 oraz w ciągu pierwszych dwóch dni cena nie uległa zmianie*, są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!
3. Pewien ośrodek badawczy zajmujący się kondycją polskich firm rozesłał ankiety do losowo wybranych 600 małych i 200 dużych przedsiębiorstw figurujących w rejestrze (stan sprzed roku). Według danych urzędu statystycznego, w ostatnim roku 0,4% małych firm i 1% dużych firm ogłosiło upadłość. Korzystając z twierdzenia Poissona, podać
  - (a) przybliżenie prawdopodobieństwa, że dokładnie jedna z ankietowanych firm w ostatnim roku ogłosiła upadłość;
  - (b) przybliżenie prawdopodobieństwa, że jeśli dokładnie jedna z ankietowanych firm ogłosiła upadłość, to zdarzenie to dotyczy małej firmy.
4. Niech  $X$  będzie zmienną losową z rozkładu o gęstości  $g(x) = ce^{-2x}\mathbf{1}_{[0, \ln 3]}(x)$ , zaś  $Y = e^{2X}$ . Wyznaczyć:
  - (a) Stałą  $c$ ;
  - (b)  $\mathbb{P}(Y \in [1, 9])$ ;
  - (c) Rozkład zmiennej  $Y$ . Czy  $Y$  ma rozkład ciągły? Uzasadnić i jeśli tak, podać gęstość.
  - (d) Wartość oczekiwaną zmiennej  $Y$ .
5. Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[-5, 5]$ , zaś  $Y = X^2$  a  $Z = 2X^2 - 3$ . Wyznaczyć:
  - (a) Rozkład zmiennej  $Y$ ;
  - (b) Wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych  $Y$  i  $Z$ .
6. Towarzystwo ubezpieczeniowe sprzedało 2000 rocznych polis komunikacyjnych. Pojedyncza polisa jest bezszkodowa z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$ , z jedną szkodą z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$ , a z dwoma szkodami z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$ .
  - (a) Wyznaczyć średnią liczbę szkód, jakiej może się spodziewać towarzystwo ubezpieczeniowe w ciągu roku ze wszystkich polis.
  - (b) Przy dodatkowym założeniu, że rozkład wartości wypłaty dla pojedynczej szkody jest rozkładem o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 400 \\ \frac{t}{2000} & t \in [400, 1000) \\ 1 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t}{10^4}\right)^2 & t \in [1000, 10000) \\ 1 & t \geq 10^4 \end{cases}$$

wyznaczyć średnią i medianę wartości jednej szkody oraz średnią wartość wypłaty ze wszystkich polis.

## Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5.12.2014

### grupa D

Z poniższych 6 zadań należy wybrać 5. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 120 min.

- Rzucono symetryczną monetą 11 razy i zaobserwowano, że orzeł wypadł dokładnie 6 razy. W takiej sytuacji, jakie jest prawdopodobieństwo, że
  - przynajmniej raz orzeł wypadł w dwóch następujących po sobie rzutach (tj. dwa lub więcej razy z rzędu)?
  - orzeł wypadł 6 razy z rzędu?
- Od pewnego czasu cena baryłki ropy na giełdzie zachowuje się w następujący sposób: każdego dnia cena spada o \$1 z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$ , a wzrasta o \$1 z prawdopodobieństwem  $\frac{2}{3}$ . Dodatkowo wahania ceny ropy w poszczególnych dniach są niezależne.
  - Oblicz prawdopodobieństwo, że po pięciu dniach notowań cena ropy wzrośnie o \$1.
  - Oblicz prawdopodobieństwo, że po pięciu dniach notowań cena ropy spadnie o \$1, jeśli wiadomo, że po pierwszych dwóch dniach cena nie uległa zmianie.
  - Czy zdarzenia, o których mowa w punkcie (b), tj.: *po pięciu dniach cena ropy spadła o \$1 oraz w ciągu pierwszych dwóch dni cena nie uległa zmianie*, są niezależne? Odpowiedź uzasadnij!
- Pewien ośrodek badawczy zajmujący się kondycją polskich firm rozesłał ankiety do losowo wybranych 800 małych i 400 dużych przedsiębiorstw figurujących w rejestrze (stan sprzed roku). Według danych urzędu statystycznego, w ostatnim roku 0,6% małych firm i 0,8% dużych firm ogłosiło upadłość. Korzystając z twierdzenia Poissona, podać
  - przybliżenie prawdopodobieństwa, że dokładnie jedna z ankietowanych firm w ostatnim roku ogłosiła upadłość;
  - przybliżenie prawdopodobieństwa, że jeśli dokładnie jedna z ankietowanych firm ogłosiła upadłość, to zdarzenie to dotyczy dużej firmy.
- Niech  $X$  będzie zmienną losową z rozkładu o gęstości  $g(x) = ce^{-x}\mathbf{1}_{[0, \ln 4]}(x)$ , zaś  $Y = e^X$ . Wyznaczyć:
  - Stałą  $c$ ;
  - $\mathbb{P}(Y \in [1, 4])$ ;
  - Rozkład zmiennej  $Y$ . Czy  $Y$  ma rozkład ciągły? Uzasadnić i jeśli tak, podać gęstość.
  - Wartość oczekiwaną zmiennej  $Y$ .
- Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[-1, 1]$ , zaś  $Y = X^4$  a  $Z = 3X^4 + 5$ . Wyznaczyć:
  - Rozkład zmiennej  $Y$ ;
  - Wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych  $Y$  i  $Z$ .
- Towarzystwo ubezpieczeniowe sprzedało 5000 rocznych polis komunikacyjnych. Pojedyncza polisa jest bezszkodowa z prawdopodobieństwem  $\frac{3}{4}$ , z jedną szkodą z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{6}$ , a z dwoma szkodami z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{12}$ .
  - Wyznaczyć średnią liczbę szkód, jakiej może się spodziewać towarzystwo ubezpieczeniowe w ciągu roku ze wszystkich polis.
  - Przy dodatkowym założeniu, że rozkład wartości wypłaty dla pojedynczej szkody jest rozkładem o dystrybuancie

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 500 \\ \frac{t}{4000} & t \in [500, 2000) \\ 1 - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{t}{10^4}\right)^2 & t \in [2000, 10000) \\ 1 & t \geq 10^4 \end{cases}$$

wyznaczyć średnią i medianę wartości jednej szkody oraz średnią wartość wypłaty ze wszystkich polis.