Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 14.12.2013
grupa A

Z poniższych 8 zadań należy wybrać 7. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0 - 10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 150 min.

1. Miasto zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe; każdego typu ulic jest po 5. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg (tzn. na każdym skrzyżowaniu jedzie tylko na północ lub na wschód). Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.

2. Bank udziela pożyczek różnym klientom. Klient może być porządny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 1%), lub średnio ryzykowny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 10%) lub bardzo ryzykowny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 30%). Szansa trafienia na klienta każdego z tych trzech typów wynosi $\frac{1}{3}$. Do banku zgłosił się klient, z którego historii kredytowej wynika, że jedyny dotychczasowy kredyt spłacił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

   (a) jest to klient bardzo ryzykowny?

   (b) nie spłaci kolejnego kredytu?

3. Firma transportowa dokonuje w ciągu roku 20000 przewozów, z czego $N_l = 12000$ odbywa się w lecie a $N_z = 8000$ w zimie. Prawdopodobieństwo awarii samochodu (np. przebicie kół, awaria akumulatora itp.) podczas przejazdu wynosi odpowiednio $p_l = 0.0001$ w lecie i $p_z = 0.0002$ w zimie. Korzystając z twierdzenia Poissona, oszacuj prawdopodobieństwo, że

   (a) liczba awaryjnych przejazdów w lecie będzie niewiększa niż 2;

   (b) liczba awaryjnych przejazdów w ciągu całego roku przekroczy 2.

   Podaj oszacowania błędu.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na zbiorze $[0, 1] \cup [2, 3]$.

   (a) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X;

   (b) Wyznaczyć kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$ zmiennej X;

   (c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$, zaś $Y = \sqrt{X}$.

   (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y. Czy Y ma rozkład ciągły? Czy Y ma rozkład dyskretny? Uzasadnij.

   (b) Czy X jest całkowalna? Czy Y jest całkowalna? Jeśli tak, wyznacz wartość oczekiwaną Y oraz $2Y - 1$. *Wskazówka. Wartość całki postaci $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$ można wyznaczyć korzystając z własności gęstości rozkładu normalnego.*

6. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $g(x) = \frac{c}{x^2}\mathbf{1}_{(2,+\infty)}(x)$. Wyznaczyć stałą c oraz $P(X \geq 3 | X \leq 4)$. Czy wariancja zmiennej X istnieje?

7. W glebie żyją dżdżownice. Są to stworzenia terytorialne. Na polu o wymiarach 10x10m w każdej ze 100 grządek (kwadratów o boku metra) żyje jeden osobnik. W maju, w okresie godowym każda z dżdżownic zbliża się do losowo wybranego brzegu swej grządki. Jeśli dwie dżdżownice spotkają się przy jednym brzegu mogą się polubić lub nie, z prawdopodobieństwami 1/2. W tym drugim przypadku walczą i jedna z nich ginie. Jeśli się polubią, następuje taniec godowy, a następnie wracają do swoich kwadratów i każda z nich (dżdżownice są obojnakami) ma jednego potomka. Oblicz oczekiwaną liczbę dżdżownic po zakończeniu okresu godowego.

8. Zmienna losowa X ma rozkład opisany przez równości

   $$P(X = 10^k) = \frac{1}{2^k}, \text{ dla } k = 1, 2, \dots,$$

   zaś $Y = \ln X$. Czy zmienne X i Y mają wartości oczekiwane? Jeśli tak, podaj te wartości.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 14.12.2013
grupa B

Z poniższych 8 zadań należy wybrać 7. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 150 min.

1. Miasto zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe; każdego typu ulic jest po 7. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg (tzn. na każdym skrzyżowaniu jedzie tylko na północ lub na wschód). Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.

2. Bank udziela pożyczek różnym klientom. Klient może być porządny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 2%), lub średnio ryzykowny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 15%) lub bardzo ryzykowny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 20%). Szansa trafienia na klienta każdego z tych trzech typów wynosi $\frac{1}{3}$. Do banku zgłosił się klient, z którego historii kredytowej wynika, że jedyny dotychczasowy kredyt spłacił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

   (a) jest to klient porządny?

   (b) spłaci kolejny kredyt?

3. Firma transportowa dokonuje w ciągu roku 10000 przewozów, z czego $N_l = 2000$ odbywa się w lecie a $N_z = 8000$ w zimie. Prawdopodobieństwo awarii samochodu (np. przebicie kół, awaria akumulatora itp.) podczas przejazdu wynosi odpowiednio $p_l = 0.0001$ w lecie i $p_z = 0.0002$ w zimie. Korzystając z twierdzenia Poissona, oszacuj prawdopodobieństwo, że

   (a) liczba awaryjnych przejazdów w lecie będzie większa niż 1;

   (b) liczba awaryjnych przejazdów w ciągu całego roku nie przekroczy 3.

   Podaj oszacowania błędu.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na zbiorze $[-1, 1] \cup [2, 3]$.

   (a) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X;

   (b) Wyznaczyć kwantyl rzędu $\frac{1}{5}$ zmiennej X;

   (c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 4xe^{-2x^2}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$, zaś $Y = X^2$.

   (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y. Czy Y ma rozkład ciągły? Czy Y ma rozkład dyskretny? Uzasadnij.

   (b) Czy X jest całkowalna? Czy Y jest całkowalna? Jeśli tak, wyznacz wartość oczekiwaną Y oraz $3Y - 17$. *Wskazówka. Wartość całki postaci* $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$ *można wyznaczyć korzystając z własności gęstości rozkładu normalnego.*

6. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $g(x) = \frac{c}{\sqrt{x^3}}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$. Wyznaczyć stałą c oraz $P(X \geq 0|X \leq 3)$. Czy wariancja zmiennej X istnieje?

7. W glebie żyją dżdżownice. Są to stworzenia terytorialne. Na polu o wymiarach 8x8m w każdej z 64 grządek (kwadratów o boku metra) żyje jeden osobnik. W maju, w okresie godowym każda z dżdżownic zbliża się do losowo wybranego brzegu swej grządki. Jeśli dwie dżdżownice spotkają się przy jednym brzegu mogą się polubić lub nie, z prawdopodobieństwami 1/2. W tym drugim przypadku walczą i jedna z nich ginie. Jeśli się polubią, następuje taniec godowy, a następnie wracają do swoich kwadratów i każda z nich (dżdżownice są obojnakami) ma jednego potomka. Oblicz oczekiwaną liczbę dżdżownic po zakończeniu okresu godowego.

8. Zmienna losowa X ma rozkład opisany przez równości

   $$P(X = k) = \frac{2}{3^k}, \text{ dla } k = 1, 2, \ldots,$$

   zaś $Y = 2^X$. Czy zmienne X i Y mają wartości oczekiwane? Jeśli tak, podaj te wartości.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 14.12.2013
grupa C

Z poniższych 8 zadań należy wybrać 7. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0-10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 150 min.

1. Miasto zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe; każdego typu ulic jest po 5. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg (tzn. na każdym skrzyżowaniu jedzie tylko na północ lub na wschód). Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.

2. Bank udziela pożyczek różnym klientom. Klient może być porządny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 1%), lub średnio ryzykowny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 5%) lub bardzo ryzykowny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 25%). Szansa trafienia na klienta porządnego wynosi $\frac{1}{2}$, a dla pozostałych dwóch typów po $\frac{1}{4}$. Do banku zgłosił się klient, z którego historii kredytowej wynika, że jedynego dotychczasowego kredytu nie spłacił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że
   (a) jest to klient bardzo ryzykowny?
   (b) nie spłaci kolejnego kredytu?

3. Firma transportowa dokonuje w ciągu roku 20000 przewozów, z czego $N_l = 12000$ odbywa się w lecie a $N_z = 8000$ w zimie. Prawdopodobieństwo awarii samochodu (np. przebicie kół, awaria akumulatora itp.) podczas przejazdu wynosi odpowiednio $p_l = 0.0002$ w lecie i $p_z = 0.0003$ w zimie. Korzystając z twierdzenia Poissona, oszacuj prawdopodobieństwo, że
   (a) liczba awaryjnych przejazdów w lecie będzie mniejsza niż 3;
   (b) liczba awaryjnych przejazdów w ciągu całego roku przekroczy 2.

   Podaj oszacowania błędu.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na zbiorze $[0,1] \cup [2,4]$.
   (a) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X;
   (b) Wyznaczyć kwantyl rzędu $\frac{3}{4}$ zmiennej X;
   (c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 3e^{-3x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$, zaś $Y = \sqrt{X}$.
   (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y. Czy Y ma rozkład ciągły? Czy Y ma rozkład dyskretny? Uzasadnij.
   (b) Czy X jest całkowalna? Czy Y jest całkowalna? Jeśli tak, wyznacz wartość oczekiwaną Y oraz $94 - Y$. *Wskazówka. Wartość całki postaci $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$ można wyznaczyć korzystając z własności gęstości rozkładu normalnego.*

6. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $g(x) = \frac{c}{x^3}\mathbf{1}_{(3,+\infty)}(x)$. Wyznaczyć stałą c oraz $P(X \leq 5 | X \geq 4)$. Czy wariancja zmiennej X istnieje?

7. W glebie żyją dżdżownice. Są to stworzenia terytorialne. Na polu o wymiarach 9x9m w każdej z 81 grządek (kwadratów o boku metra) żyje jeden osobnik. W maju, w okresie godowym każda z dżdżownic zbliża się do losowo wybranego brzegu swej grządki. Jeśli dwie dżdżownice spotkają się przy jednym brzegu mogą się polubić lub nie, z prawdopodobieństwami 1/2. W tym drugim przypadku walczą i jedna z nich ginie. Jeśli się polubią, następuje taniec godowy, a następnie wracają do swoich kwadratów i każda z nich (dżdżownice są obojnakami) ma jednego potomka. Oblicz oczekiwaną liczbę dżdżownic po zakończeniu okresu godowego.

8. Zmienna losowa X ma rozkład opisany przez równości
$$P(X = 7^k) = \frac{3}{4^k}, \text{ dla } k = 1, 2, \ldots,$$
   zaś $Y = \ln X$. Czy zmienne X i Y mają wartości oczekiwane? Jeśli tak, podaj te wartości.

Kolokwium z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 14.12.2013
grupa D

Z poniższych 8 zadań należy wybrać 7. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce. Każde z zadań będzie punktowane w skali $0 - 10$pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu. Czas trwania kolokwium: 150 min.

1. Miasto zbudowane jest na planie kwadratu i poszatkowane ulicami biegnącymi ze wschodu na zachód i z północy na południe; każdego typu ulic jest po 7. Kierowca jedzie z południowo-zachodniego wierzchołka miasta na kraniec północno-wschodni, wybierając losowo jedną z najkrótszych dróg (tzn. na każdym skrzyżowaniu jedzie tylko na północ lub na wschód). Oblicz prawdopodobieństwo, że kierowca przejedzie przez środek miasta.

2. Bank udziela pożyczek różnym klientom. Klient może być porządny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 2%), lub średnio ryzykowny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 15%) lub bardzo ryzykowny (szansa, że nie spłaci zaciągniętego kredytu wynosi 40%). Szansa trafienia na klienta porządngo wynosi $\frac{1}{2}$, zaś każdego z pozostałych dwóch typów po $\frac{1}{4}$. Do banku zgłosił się klient, z którego historii kredytowej wynika, że jedynego dotychczasowego kredytu nie spłacił. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

   (a) jest to klient porządny?
   (b) spłaci kolejny kredyt?

3. Firma transportowa dokonuje w ciągu roku 15000 przewozów, z czego $N_l = 10000$ odbywa się w lecie a $N_z = 5000$ w zimie. Prawdopodobieństwo awarii samochodu (np. przebicie kół, awaria akumulatora itp.) podczas przejazdu wynosi odpowiednio $p_l = 0.0001$ w lecie i $p_z = 0.0002$ w zimie. Korzystając z twierdzenia Poissona, oszacuj prawdopodobieństwo, że

   (a) liczba awaryjnych przejazdów w lecie będzie niewiększa niż 2;
   (b) liczba awaryjnych przejazdów w ciągu całego roku przekroczy 2.

   Podaj oszacowania błędu.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na zbiorze $[0, 1] \cup [3, 4]$.

   (a) Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X;
   (b) Wyznaczyć kwantyl rzędu $\frac{1}{3}$ zmiennej X;
   (c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 6xe^{-3x^2}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$, zaś $Y = X^2$.

   (a) Wyznaczyć rozkład zmiennej Y. Czy Y ma rozkład ciągły? Czy Y ma rozkład dyskretny? Uzasadnij.
   (b) Czy X jest całkowalna? Czy Y jest całkowalna? Jeśli tak, wyznacz wartość oczekiwaną Y oraz $12 - 2Y$. *Wskazówka. Wartość całki postaci* $\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$ *można wyznaczyć korzystając z własności gęstości rozkładu normalnego.*

6. Niech X będzie zmienną losową o gęstości $g(x) = \frac{c}{\sqrt{x^5}}\mathbf{1}_{(2,+\infty)}(x)$. Wyznaczyć stałą c oraz $P(X \leq 4 | X \geq 3)$. Czy wariancja zmiennej X istnieje?

7. W glebie żyją dżdżownice. Są to stworzenia terytorialne. Na polu o wymiarach 7x7m w każdej z 49 grządek (kwadratów o boku metra) żyje jeden osobnik. W maju, w okresie godowym każda z dżdżownic zbliża się do losowo wybranego brzegu swej grządki. Jeśli dwie dżdżownice spotkają się przy jednym brzegu mogą się polubić lub nie, z prawdopodobieństwami 1/2. W tym drugim przypadku walczą i jedna z nich ginie. Jeśli się polubią, następuje taniec godowy, a następnie wracają do swoich kwadratów i każda z nich (dżdżownice są obojnakami) ma jednego potomka. Oblicz oczekiwaną liczbę dżdżownic po zakończeniu okresu godowego.

8. Zmienna losowa X ma rozkład opisany przez równości

$$P(X = k) = \frac{1}{2^k}, \text{ dla } k = 1, 2, \ldots,$$

   zaś $Y = 4^X$. Czy zmienne X i Y mają wartości oczekiwane? Jeśli tak, podaj te wartości.