

Przykładowe zagadnienia na piątą kartkówkę

1. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = 3x1_{\{0 \leq y \leq x \leq 1\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$, $\mathbb{E}(\sin Y|X)$.

2. Wysokość szkody S ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, a dodatkowe koszty X związane z jej usunięciem mają rozkład jednostajny na przedziale $[0, S]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej X oraz obliczyć $\mathbb{P}(X \leq 10|S \leq 5)$ i $\mathbb{P}(S \leq 5|X \leq 10)$.

3. Zmienne losowe X, Y są niezależne, X ma rozkład Bernoulliego z parametrami 10, $1/2$, a Y ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = 1/2$.

- Wyznaczyć rozkład $X + Y$.
- Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X + Y)$.

4. Zmienna losowa Y ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$. Wyznaczyć $\mathbb{E}([2Y]|[Y])$ ($[x]$ oznacza część całkowitą liczby x).

5. Zmienna losowa (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

- Wyznaczyć gęstość zmiennej (X, Y) .
- Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X + Y, X + 2Y)$.
- Wyznaczyć taką liczbę a , by zmienne $X + aY$ oraz Y były niezależne.
- Obliczyć $\mathbb{E}(X + Y|Y)$ (wskazówka: warto skorzystać z podpunktu c)).