

## RP WNE 2019/2020, IX seria zadań

1. Rzucono dwa razy prawidłową kostką. Niech  $X$  oznacza liczbę wyrzuconych szóstek, a  $Y$  - liczbę wyrzuconych piątek. Na jakim zbiorze jest skoncentrowana zmienna  $(X, Y)$ ? Obliczyć  $\mathbb{P}(X > Y)$  oraz  $\text{Cov}(X, Y)$ .

2. Zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}\left((X, Y) = (k, \ell)\right) = \frac{4k\ell}{n^2(n+1)^2}, \quad k, \ell = 1, 2, \dots, n.$$

- Obliczyć  $\mathbb{P}(X + Y = n + 1)$ .
- Wyznaczyć rozkład zmiennej  $X$ .
- Obliczyć  $\text{Cov}(X, Y)$ .

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością  $g(x, y) = Cx1_{\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}}$ . Obliczyć  $C$ ,  $\mathbb{P}(X + Y < 1)$  oraz  $\mathbb{P}(Y \leq 1/2)$ . Wyznaczyć rozkłady zmiennych  $X$  oraz  $Y$  oraz ich kowariancję.

4. Zmienne  $X, Y$  są całkowalne z kwadratem. Macierz kowariancji zmiennej  $(X, Y)$  wynosi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych  $X + 3Y, 2X - Y$ .

5. Dwuwymiarowa zmienna losowa  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = xe^{-y}1_{\{0 \leq x \leq y\}}.$$

- Wyznaczyć rozkład zmiennej  $X$ .
- Obliczyć  $\mathbb{E}e^{Y/2}$ .
- Obliczyć wartość dystrybuanty zmiennej  $(X, Y)$  w punkcie  $(1, 1)$ .
- Wyznaczyć rozkład zmiennej  $Y/X$ .

### Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na te ćwiczenia):

- Podać definicję dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej  $(X, Y)$ .
- Co to są rozkłady brzegowe?
- Podać definicję macierzy kowariancji zmiennej  $(X, Y)$  oraz współczynnika korelacji zmiennych  $X, Y$ .

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po tych ćwiczeniach):

4. Rzucono trzy razy prawidłową monetą. Niech  $X$  oznacza liczbę orłów w pierwszych dwóch rzutach, a  $Y$  - łączną liczbę orłów. Wyznaczyć  $\mathbb{P}(X = Y)$  oraz  $\text{Cov}(X, Y)$ .

5. Zmienna  $(X, Y)$  ma rozkład z gęstością  $g(x, y) = Cxy1_{\{(x, y): 0 \leq x \leq y \leq 1\}}$ . Obliczyć  $C$  oraz  $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$ .

- Zmienna losowa ma rozkład z gęstością  $g(x, y) = 1_{\{0 \leq y \leq 1 - |x|\}}$ .
  - Podać wartość dystrybuanty zmiennej  $(X, Y)$  w punkcie  $(1, \frac{1}{2})$ .
  - Wyznaczyć gęstości zmiennych  $X$  i  $Y$ .
  - Obliczyć  $\text{Cov}(X, Y)$ .
  - Wyznaczyć rozkład zmiennej  $Y - X$ .

7. Rzucamy prawidłową kostką aż do wypadnięcia szóstki. Niech  $X$  oznacza łączną liczbę rzutów, a  $Y$  - liczbę wyrzuconych piątek. Wyznaczyć rozkład  $(X, Y)$ .