

RP WNE 2019/2020, VIII seria zadań

1. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{2k}{n(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennych X oraz $Y = 2X + 5$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością

$$g(x) = \frac{x+2}{8} 1_{(-2,2)}(x).$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\text{Var}X$, współczynnik asymetrii X oraz kurtozę X .

3. Zmienna losowa X ma rozkład normalny o średniej 1 i wariancji 4. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $3X^2 + 1$.

4. Rozważmy rynek akcji z notowaniami ciągłymi. Prawdopodobieństwo, że kurs akcji pewnej spółki zanotuje (pierwszy) spadek w czasie niewiększym niż t od otwarcia sesji wynosi

$$p(t) = \begin{cases} 1 - t^{-4} & \text{dla } t \geq 1, \\ 0 & \text{dla } t < 1. \end{cases}$$

Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję czasu w którym kurs spółki wzrasta. Dla jakich p istnieje skończony p -ty moment tej zmiennej losowej?

5. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $Y = \max(X, a)$, gdzie a jest dodatnią liczbą rzeczywistą.

6. Grupę 10 osób w wieku między 25 a 50 lat zapytano ile średnio minut zajmuje im dojazd do miejsca pracy. Uzyskano odpowiedzi: 40, 20, 20, 30, 30, 10, 60, 30, 60, 90. Wyznaczyć rozkład empiryczny μ związany z tą próbką i obliczyć jego dystrybuantę w punkcie 50. Ile wynosi średnia empiryczna próbki?

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na te ćwiczenia):

1. Podać definicję wariancji i p -tego momentu absolutnego zmiennej X .

2. Podać definicję rozkładu empirycznego i dystrybuanty empirycznej związanej z próbką X_1, X_2, \dots, X_n oraz kwantyla rzędu p , średniej i wariancji z próbki.

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po tych ćwiczeniach):

3. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{9}|x|1_{[-3,3]}(x)$. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennych X , $Y = 3 - 5X$.

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$. Wyznaczyć wariancję zmiennej $2X^5 - 1$, kurtozę zmiennej X oraz drugi moment zmiennej $X^2 - 1$.

5. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}(X = k) = 1/21$, $k = -10, -9, \dots, 10$. Wyznaczyć wariancję zmiennej X .

6. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez

$$\mathbb{P}(X = -2) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X = 3) = 1/3, \quad \mathbb{P}(X = a) = 1/6.$$

Wyznaczyć taką liczbę a , by zmienna X miała najmniejszą możliwą wariancję.

7. W celu wstępnego zbadania rozkładu liczby wypadków na pewnym ruchliwym skrzyżowaniu, zgromadzono dane z ubiegłych lat: w latach 2000, 2001, \dots , 2010 liczby te wynosiły odpowiednio 10, 13, 7, 18, 15, 12, 20, 24, 19, 10, 21. Wyznaczyć wartość dystrybuanty empirycznej tej próbki w punkcie 15, medianę i pierwszy decyl rozkładu empirycznego.