

RP WNE 2019/2020, V + VI seria zadań

Uwaga: zadania z tej serii przeznaczone są dla grup mających zajęcia w piątek, 15 listopada

1. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{3}{8}x^2 1_{(0,2)}(x)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) $\max\{X, 1\}$, b) X^{-2} . Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

2. Zmienna X ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład $Y = -\ln X$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) e^X , b) X^2 . Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

4. Wyznaczyć kwantyl rzędu $\rho = 5/16$ dla a) rozkładu wykładniczego z parametrem λ , b) rozkładu Bernoulliego z parametrami 4, $1/2$, c) rozkładu Poissona z parametrem 1.

5. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{6}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X - 1)$.

6. Rozważmy następującą grę. Rzucamy symetryczną monetą do momentu uzyskania orła. Jeśli orzeł pojawił się w n -tym rzucie, wygrywamy $(1, 5)^n$ złotych. Ile warto zapłacić za udział w tej grze? A gdyby wygrana za wyrzucenie orła w n -tym rzucie wynosiła 2^n złotych?

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przed tymi ćwiczeniami):

2. Podać definicję kwantyla rzędu ρ rozkładu zmiennej losowej X .
3. Podać definicję wartości oczekiwanej zmiennej losowej dyskretnej X .

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po piątym ćwiczeniu):

4. Z koła o promieniu R losujemy punkt. Niech X oznacza odległość tego punktu od środka koła. Wyznaczyć rozkład zmiennej X^2 .
5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{2}x 1_{[0,2]}(x)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min\{X - 1, 0\}$. Czy ma on gęstość?
6. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{1, 2, \dots, 10\}$, zadany przez

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \dots = \mathbb{P}(X = 10) = p.$$

Obliczyć p , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X + 5)$.

7. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$, zadany przez $P(X = k) = \frac{1}{n}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X + 1)$.
8. Zmienna losowa X ma rozkład Bernoulliego z parametrami 5 i $\frac{1}{3}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X - 1)$.