

RP WNE 2019/2020, III seria zadań

1. Osoby O_1, O_2, \dots, O_{10} ustawiają się losowo w kolejce. Zbadać niezależność zdarzeń

- $\{O_1 \text{ stoi bezpośrednio przed } O_2\}$, $\{O_5 \text{ stoi przed } O_4 \text{ (niekoniecznie bezpośrednio)}\}$,
- $\{O_1 \text{ stoi przed } O_2 \text{ i przed } O_3\}$, $\{O_2 \text{ nie stoi na końcu}\}$.

2. Rzucamy dwiema kostkami. Określmy zdarzenia: A_1 - na pierwszej kostce wypadła nieparzysta liczba oczek, A_2 - na drugiej kostce wypadła nieparzysta liczba oczek, A_3 - suma liczb oczek wyrzuconych na obu kostkach jest liczbą nieparzystą. Czy zdarzenia te są niezależne parami? Czy są niezależne zespołowo?

3. W urnie I umieszczono pięć białych oraz trzy czarne kule, a w urnie II - dwie białe i dwie czarne kule. Powtarzamy 10 razy następujące losowanie: ciągniemy po jednej kuli z każdej urny, oglądamy je, oraz wrzucamy z powrotem. Obliczyć prawdopodobieństwo, iż co najmniej dwa razy wyciągnięto kule tych samych kolorów.

4. W urnie znajduje się sześć prawidłowych kostek oraz jedna fałszywa, z dwiema szóstkami i czterema jedynkami. Losujemy kostkę z urny i wykonujemy nią 10 rzutów.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z wyrzuconych liczb oczek będzie jedynką lub szóstką?

b) Załóżmy, że każda z wyrzuconych liczb jest jedynką lub szóstką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana kostka jest fałszywa?

5. Strzelec A trafia do celu z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, a strzelec B - z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Oddano 6 strzałów: za każdym razem strzelcy rzucają symetryczną monetą i w przypadku wypadnięcia orła A oddaje strzał, w przypadku wypadnięcia reszki strzela B . Jakie jest prawdopodobieństwo, że

a) cel został trafiony 4 razy;

b) strzelał tylko strzelec A , jeśli cel został trafiony 4 razy?

c) Jaka liczba trafień jest najbardziej prawdopodobna?

6. Tekst artykułu zawiera 1 000 000 znaków. W trakcie pisania każdy znak może zostać błędnie wprowadzony z prawdopodobieństwem 0,001. Recenzent znajduje każdy z błędów z prawdopodobieństwem 0,99. Wyznaczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że a) przed recenzją b) po recenzji tekst będzie zawierał nie więcej niż 2 błędy. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.

7. Piekarnia piecze codziennie 1000 bułek; do ciasta dodawane jest 2000 rodzyneków. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że w kupionej w tej piekarni bułce będzie co najmniej jeden rodzynek; podać błąd przybliżenia.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać po trzecim wykładzie a przed tymi ćwiczeniami):

1. Podać definicję niezależności zdarzeń. Co to znaczy, że zdarzenia A_1, A_2, \dots, A_{20} są niezależne parami?

2. Co to jest schemat Bernoulliego?

3. Sformułować twierdzenie Poissona.

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po tych ćwiczeniach):

4. Z talii 52 kart wylosowano dwie karty bez zwracania. Czy zdarzenia {wylosowano co najmniej jednego kiera} oraz {nie wylosowano żadnej figury} są niezależne?

5. Dane są zdarzenia A, B , przy czym $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Udowodnić, że A i B są niezależne.

6. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucono dokładnie siedem trójek? Jaka liczba trójek jest najbardziej prawdopodobna?

7. Losujemy niezależnie 10 liczb x_1, x_2, \dots, x_{10} ze zbioru $\{\frac{1}{2}, 2\}$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że $x_1 x_2 \dots x_{10} = 4$.

8. Z przedziału $[0, 3]$ wylosowano niezależnie 20 liczb. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dokładnie połowa z nich trafi do przedziału $[2, 3]$.

9. Z przedziału $[0, 1000]$ wylosowano niezależnie 2000 liczb. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że co najmniej 3 z nich trafi do przedziału $[20, 21]$. Oszacować błąd związany z przybliżeniem.