

RP WNE 2019/2020, X seria zadań

1. Rzucamy prawidłową kostką aż do momentu wyrzucenia parzystej liczby oczek. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów, a Y - liczbę oczek w ostatnim rzucie.

- Wyznaczyć rozkład zmiennej (X, Y) .
- Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$. Czy zmienne X, Y są niezależne?

2. Z talii 52 kart losujemy 5 kart a) ze zwracaniem, b) bez zwracania. Niech X oznacza liczbę pików wśród wyciągniętych kart. Obliczyć wartość oczekiwaną oraz wariancję X .

3. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy z parametrem 1, a Y ma rozkład z gęstością

$$g_Y(y) = ye^{-y}1_{[0, \infty)}(y).$$

Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $X + Y$.

4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

- Obliczyć wartość dystrybuanty zmiennej (X, Y) w punkcie $(0, 0)$.
- Wyznaczyć gęstości zmiennych X i Y . Czy X i Y mają ten sam rozkład?
- Obliczyć $\text{Cov}(X, Y)$. Czy X, Y są niezależne?
- Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(0, 0)$ i macierzy kowariancji

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Czy X, Y są niezależne?
- Wyznaczyć gęstość zmiennej (X, Y) .
- Jaki rozkład ma zmienna $X + 2Y + 1$?
- Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X + Y, Y)$.
- Dla jakiej wartości parametru a , zmienne X oraz $X + aY$ są niezależne?

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na te ćwiczenia):

- Jak zbadać, czy zmienne losowe są niezależne?
- Co to znaczy, że zmienne losowe są nieskorelowane?

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po tych ćwiczeniach):

3. Zmienne losowe X, Y, Z mają ten sam rozkład i spełniają równości $\text{Var}(X + Y + Z) = 21$, $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, Z) = \text{Cov}(Z, X) = 1$. Obliczyć $\text{Var}X$ oraz $\text{Var}(X + Y)$.

4. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{2}\right).$$

Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej (X, Y) , rozkład zmiennej $2X - Y + 2$ oraz rozstrzygnąć, czy zmienne $X, X - Y$ są niezależne.

5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady jednostajne na odcinkach $[0, 1]$ oraz $[0, 2]$, odpowiednio. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej $X + Y$.

6. Z kwadratu $[0, 2] \times [0, 2]$ losujemy w sposób niezależny 20 punktów. Niech X oznacza liczbę tych punktów spośród wylosowanych, które należą do kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej X .