

RP WNE 2018/2019, VII seria zadań

1. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} 1_{[0,1]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(3-2X)$.
2. Zmienna X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{2} \sin x 1_{[0,\pi]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E} \cos X$.
3. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny. Obliczyć $\mathbb{E}e^{2X}$ oraz $\mathbb{E}e^{X^2/4}$.
4. Dochód pracownika zatrudnionego w pewnej fabryce jest zmienną losową o rozkładzie zadanym przez dystrybuantę

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 200, \\ ct^2(1500-t) & \text{dla } 200 \leq t < 1000, \\ 1 & \text{dla } t \geq 1000, \end{cases}$$

gdzie $c = 2 \cdot 10^{-9}$. Wyznaczyć średni dochód pracownika.

5. Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny z parametrem $p \in (0, 1)$ (tzn. $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$). Obliczyć $\mathbb{E}X$.
6. Zmienna X ma rozkład Poissona z parametrem 3. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}X(X-1)$, $\mathbb{E}X^2$ oraz $\mathbb{E}2^X$.
7. Każdy bok i każdą przekątną sześciokąta foremnego malujemy losowo jednym z trzech kolorów: białym, czarnym lub czerwonym (kolory dla różnych odcinków wybieramy niezależnie). Niech X oznacza liczbę jednobarwnych trójkątów o wierzchołkach będących wierzchołkami sześciokąta. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.
8. Rzucamy kostką aż do momentu, gdy wypadnie każda możliwa liczba oczek. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby rzutów.
9. W grupie jest n studentów. Któregoś dnia prowadzący zajęcia rozdał sprawdzone kartkówki w sposób losowy (przy czym każdemu studentowi wręczył jedną kartkówkę). Niech X oznacza liczbę studentów, którzy otrzymali swoją kartkówkę. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać przychodząc na siódme ćwiczenia):

1. Podać definicję wartości oczekiwanej zmiennej losowej ciągłej X .

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po siódmych ćwiczeniach):

2. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = 2x^{-3} 1_{[1,\infty)}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(1-X)$.
3. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = C\sqrt{x} 1_{[0,1]}(x)$. Obliczyć C , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(5X+2)$.
4. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{C}{1+x} 1_{[1,5]}(x)$. Obliczyć C , $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X+3)$.
5. Zmienna losowa X ma standardowy rozkład normalny. Obliczyć $\mathbb{E}X(X+1)$ i $\mathbb{E}e^{3X^2/8}$.
6. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = (e-1)^{-1} e^{1-x} 1_{[0,1]}(x)$. Obliczyć $\mathbb{E}(X+1)$ oraz $\mathbb{E}2^{X+2}$.
7. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 49\}$ losujemy 6 liczb bez zwracania. Niech X oznacza liczbę nieparzystych numerów wśród wylosowanych. Wyznaczyć $\mathbb{E}X$.
8. Dziesięć dziewczynek oraz dziesięciu chłopców ustawia się losowo w pary. Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby par złożonych z samych dziewczynek.