RP WNE 2018/2019, V + VI seria zadań

Uwaga: ze względu na różną liczbę zajęć w różnych grupach ćwiczeniowych, zadania z tej serii przeznaczone są dla tych grup, które nie miały zajęć w tygodniu 29 października – 2 listopada

1. Dystrybuanta F zmiennej losowej X zadana jest następująco:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < -2, \\ \frac{1}{3} & \text{jeśli } t \in [-2, 0), \\ \frac{1}{3}t + 1/2 & \text{jeśli } t \in [0, 1), \\ \frac{5}{6} & \text{jeśli } t \in [1, 5), \\ 1 & \text{jeśli } t \geqslant 5. \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{P}(X \in (3, 7))$, $\mathbb{P}(X \in [-2, -1])$, $\mathbb{P}(X \in [-2, -1))$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(|X| \leqslant 1)$. Czy X ma rozkład dyskretny? Czy X ma rozkład ciągły? Wyznaczyć kwantyl rzędu $\rho = 1/4$.

2. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{3}{8}x^2 1_{(0,2)}(x)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) $\max\{X, 1\}$, b) X^{-2}. Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

3. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć rozkłady zmiennych a) e^X, b) X^2. Czy te rozkłady są ciągłe? W przypadku odpowiedzi twierdzącej, podać gęstość.

4. Wyznaczyć kwantyl rzędu $\rho = 5/16$ dla a) rozkładu wykładniczego z parametrem λ, b) rozkładu Bernoulliego z parametrami 4, 1/2.

5. Zmienna losowa X ma rozkład zadany przez równości

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X = 5) = \frac{1}{6}.$$

Obliczyć $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(2X - 1)$. Naszkicować dystrybuantę zmiennej X.

6. Rozważmy następującą grę. Rzucamy symetryczną monetą do momentu uzyskania orła. Jeśli orzeł pojawił się w n-tym rzucie, wygrywamy $(1, 5)^n$ złotych. Ile warto zapłacić za udział w tej grze? A gdyby wygrana za wyrzucenie orła w n-tym rzucie wynosiła 2^n złotych?

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria (jaką trzeba znać po piątym wykładzie a przed piątymi ćwiczeniami):

1. Jakie warunki muszą spełniać parametry a, $b \in \mathbb{R}$, by funkcja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadana wzorem

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } t < 1, \\ a + \frac{b}{t} & \text{jeśli } t \geqslant 1, \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnego rozkładu prawdopodobieństwa? Co dodatkowo trzeba założyć, aby taki rozkład był ciągły (tzn. miał gęstość)?

2. Podać definicję kwantyla rzędu ρ rozkładu zmiennej losowej X.

3. Podać definicję wartości oczekiwanej zmiennej losowej dyskretnej X.

Zadania (jakie trzeba umieć rozwiązać po piątych ćwiczeniach):

4. Z koła o promieniu R losujemy punkt. Niech X oznacza odległość tego punktu od środka koła. Wyznaczyć rozkład zmiennej X^2.

5. Zmienna losowa X ma rozkład z gęstością $g(x) = \frac{1}{2}x\, 1_{[0,2]}(x)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej $Y = \min\{X - 1, 0\}$. Czy ma on gęstość?

6. Podać definicję kwantyla rzędu ρ rozkładu zmiennej losowej X.

7. Zmienna losowa X ma rozkład skoncentrowany na zbiorze $\{1, 2, \ldots, 10\}$, zadany przez

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(X = 3) = \ldots = \mathbb{P}(X = 10) = p.$$

Obliczyć p, $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{E}(4X + 5)$.