RP WNE 2018/2019, XIV seria zadań

1. Macierz przejścia jednorodnego łańcucha Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ na przestrzeni $E = \{1,2,3,4\}$ dana jest następująco:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Jakie jest prawdopodobieństwo dojścia w dwóch krokach ze stanu 1 do stanu 2? (tzn. policzyć $p_{12}(2)$).

b) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n. obliczyć prawdopodobieństwo tego, że X_n będzie w stanie 2 przed stanem 4.

c) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n. obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 2.

d) Wyznaczyć rozkład stacjonarny. Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?

e) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że $X_{10000} = 1$.

2. Rzucamy kostką tak długo, aż pojawi się ciąg 16 lub 66. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ciąg 16 pojawi się wcześniej?

3. Po wierzchołkach pięciokąta ABCDE porusza się pionek. W chwili początkowej znajduje się w punkcie A, a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z prawdopodobieństwem 1/2 do jednego z sąsiednich wierzchołków. Obliczyć

a) prawdopodobieństwo, że pionek powróci do punktu A przed dotarciem do punktu C;

b) wartość oczekiwaną liczby ruchów, jakie wykona pionek przed powrotem do punktu A;

c) rozkład stacjonarny.

4. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy serię 3 orłów. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby przeprowadzonych rzutów.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria, jaką trzeba znać po wykładzie:

1. Co to jest macierz przejścia dla jednorodnego łańcucha Markowa? Podać własności macierzy przejścia i macierzy przejścia w n krokach.

2. Podać definicje nieprzywiedlnego łańcucha Markowa, nieokresowego łańcucha Markowa i okresowego łańcucha Markowa.

3. Co to jest rozkład stacjonarny? Sformułować twierdzenie ergodyczne.

Przykładowe dalsze zadanie, jakie trzeba umieć rozwiązać po czternastych ćwiczeniach

4. Macierz przejścia jednorodnego łańcucha Markowa $(X_n)_{n\geqslant 0}$ na przestrzeni $E = \{1,2,3\}$ dana jest następująco:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że startując ze stanu 2, po dwóch krokach łańcuch będzie znów w stanie 2?

b) Zakładając, że $X_0 = 1$ p.n. obliczyć prawdopodobieństwo, że łańcuch powróci do 1 przed dojściem do stanu 3.

c) Zakładając, że $X_0 = 3$ p.n. obliczyć wartość oczekiwaną czasu dojścia do stanu 1.

d) Wyznaczyć rozkład stacjonarny. Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieprzywiedlny?

e) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że $X_{10000} = 1$.

f) Wyznaczyć średnie czasy powrotów dla poszczególnych stanów i porównać z rozkładem stacjonarnym.