RP WNE 2017/2018, XIII seria zadań

1. Dokonujemy stukrotnego pomiaru pewnej wielkości fizycznej. Błędy związane z kolejnymi pomiarami są niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej 0 i wariancji 0,1. Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować z góry prawdopodobieństwo, że wartość bezwzględna sumarycznego błędu przekroczy 10.

2. Korzystając z nierówności Bernsteina, oszacować z góry prawdopodobieństwo, że przy trzystukrotnym rzucie prawidłową kostką szóstka wypadnie co najmniej 60 razy.

3. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są nieskorelowane, przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1/n, 1/n]$. Czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa?

4. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są nieskorelowane, przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = 1/2$. Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa do zmiennej losowej stale równej 0.

5. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład wykładniczy z parametrem 2. Zbadać zbieżność p.n. ciągu

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n + 3}{n + 31}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

6. Z odcinka $[0, 3]$ losujemy w sposób niezależny kolejno punkty A_1, A_2, ... Dla każdego n, niech S_n oznacza liczbę tych punktów spośród A_1, A_2, ..., A_n, które wpadły do odcinka $[0, 1]$. Sprawdzić, że $\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{3}$ p.n.

7. Klient wychodzi wieczorem z baru, po czym losowo przemieszcza się stawiając krok w lewo lub w prawo w następujący sposób: niech S_n oznacza jego położenie w chwili n (mierzone w krokach od baru). Zakładamy, że $S_0 = 0$, a dla $n > 0$ definiujemy $S_n = X_1 + X_2 \ldots + X_n$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi takimi że $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1) = p$ dla pewnego $p \neq \frac{1}{2}$. Udowodnić, że klient oddali się od baru: $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty) = 1$ jeśli $p > \frac{1}{2}$ oraz $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$ jeśli $p < \frac{1}{2}$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria, jaką trzeba znać po wykładzie:

1. Sformułować nierówność Czebyszewa, nierówność Czebyszewa-Bienaymé i nierówność Bernsteina.

2. Podać definicje zbieżności według prawdopodobieństwa i prawie na pewno.

3. Sformułować słabe i mocne prawa wielkich liczb dla schematu Bernoulliego.

Zadania, jakie trzeba umieć rozwiązać po trzynastych ćwiczeniach:

4. Rzucono 100 razy prawidłową monetą. Korzystając z nierówności Bernsteina, oszacować prawdopodobieństwo, że orzeł pojawi się w ponad 60% rzutów.

5. Zmienne losowe X_1, X_2, ... są nieskorelowane, przy czym dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład $\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = 1/(2n^2)$, $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n^2$. Rozstrzygnąć, czy ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny według prawdopodobieństwa.

6. Zmienne X_1, X_2, ... są niezależne i mają rozkład $\mathcal{U}([0, 1])$. Udowodnić, że ciąg

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

jest zbieżny p.n. i wyznaczyć jego granicę.