RP WNE 2017/2018, XII seria zadań

1. Porównano zatrudnienie w różnych szwalniach w pewnej strefie ekonomicznej. Zaobserwowano, iż liczba krawcowych zatrudnionych w poszczególnych firmach jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[100, 300]$. Wynagrodzenie krawcowej zależy od firmy, i wynosi średnio 2400PLN przy odchyleniu standardowym $400\sqrt{3}$. Stwierdzono, iż współczynnik korelacji wielkości zatrudnienia i poziomu wynagrodzenia w zbadanych firmach równy jest $0,6$. Wyznaczyć najlepsze liniowe przybliżenie zależności między oferowanym wynagrodzeniem a liczbą osób podejmującą zatrudnienie w danej firmie.

2. Rzucono dwa razy kostką i przez X, Y oznaczono liczby oczek w pierwszym i drugim rzucie. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(X+Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

3. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ losujemy bez zwracania dwie liczby, mniejszą oznaczamy przez X, a większą przez Y. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(XY + X|X)$.

4. Miesięczne zużycie energii elektrycznej w pewnej fabryce ma rozkład jednostajny na przedziale $[200, 250]$. Przy zadanym zużyciu λ, ilość wyemitowanego dwutlenku węgla ma rozkład wykładniczy z parametrem $5 - \lambda/100$. Wyznaczyć rozkład (gęstość) ilości wyemitowanego dwutlenku węgla w ciągu danego miesiąca.

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 0)$ oraz $(0, 1)$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$, $\mathbb{E}(XY^2 + 3X^2Y - 1|X)$ oraz $\mathbb{P}(Y \leqslant \frac{1}{2}|X)$.

6. Rzucamy raz kostką, a następnie rzucamy nią tyle razy, ile oczek wypadło za pierwszym razem. Niech X oznacza sumę wszystkich liczb oczek (łącznie z pierwszym rzutem). Obliczyć $\mathbb{E}X$.

Przykładowe zagadnienia na kartkówkę

Teoria, jaką trzeba znać przychodząc na ćwiczenia:

1. Podać wzory na współczynniki a i b najlepszego liniowego przybliżenia zmiennej losowej Y zmienną losową X.

2. Podać definicję warunkowej wartości oczekiwanej dla zmiennej dyskretnej.

3. Podać definicję gęstości warunkowej i warunkowej wartości oczekiwanej dla zmiennej ciągłej.

Zadania, jakie trzeba umieć rozwiązać po jedenastych ćwiczeniach:

4. Nadajnik wysyła sygnał X. Odbiornik odbiera sygnał $Y = aX + Z$, gdzie $a > 0$ jest współczynnikiem wzmocnienia, zaś Z jest zakłóceniem. Wiadomo, że X, Z są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym $\mathbb{E}X = m$, $\operatorname{Var} X = 1$, $\mathbb{E}Z = 0$ oraz $\operatorname{Var} Z = \sigma^2$. Wyznaczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X, Y oraz regresję liniową X względem Y.

5. Wiadomo, że $\mathbb{P}(Y = 1|X = 5) = 1/3$ oraz $\mathbb{P}(Y = 5|X = 5) = 2/3$. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X = 5)$ oraz $\mathbb{E}(XY^2|X = 5)$.

6. W urnie znajdują się dwie białe kule, z numerami 1 i 2, oraz trzy czarne kule, z numerami 1, 2 oraz 3. Z urny wyciągnięto bez zwracania dwie kule. Niech X oznacza największy z wylosowanych numerów, a Y oznacza liczbę wylosowanych białych kul. Obliczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ oraz $\mathbb{E}(X|Y)$.

7. Rzucono trzy razy monetą. Niech X oznacza łączną liczbę wyrzuconych orłów oraz

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadł orzeł,} \\ 0 & \text{jeśli w ostatnim rzucie wypadła reszka.} \end{cases}$$

Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(XY|X)$.

8. Pracownik wykonuje dwie rozmowy telefoniczne: czas trwania pierwszej rozmowy, oznaczony przez X, ma rozkład jednostajny na przedziale $[10, 20]$; czas trwania drugiej rozmowy ma rozkład jednostajny na przedziale $[5, X]$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną łącznego czasu trwania rozmów.

9. Liczba monet w urnie jest zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem 2. Losujemy kolejno monety z urny i każdą z nich wykonujemy rzut. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych orłów. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

10. Rzucono raz kostką i raz monetą. Niech X oznacza liczbę wyrzuconych oczek, pomnożoną przez 2 jeśli na monecie wypadł orzeł. Obliczyć $\mathbb{E}X$.

11. Na odcinku $[0,1]$ wybieramy losowo liczbę X (zgodnie z rozkładem jednostajnym), a następnie z odcinka $[0,X]$ wybieramy losowo liczbę Y (także zgodnie z rozkładem jednostajnym). Obliczyć $\mathbb{E}Y$.

12. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach $(2,0)$, $(0,1)$ oraz $(-1,0)$. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(X^2+XY|Y)$.

13. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład z gęstością

$$g(x,y) = (x+y)1_{\{0\leqslant x\leqslant 1,\, 0\leqslant y\leqslant 1\}}.$$

Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ oraz $\mathbb{E}(\sin X + Y|Y)$.