Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 4.02.2014r.
Wersja I

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Aby uzyskać maksimum punktów, należy rozwiązać 7 wybranych zadań z 8. Każde zadanie oceniane jest na skali 0-10 pkt.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, należy oddać 8 kartek. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Zmienna X ma rozkład o gęstości $g_X(x) = 2e^{-2x}1_{(0,+\infty)}(x)$, zaś zmienna Y – rozkład o gęstości $g_Y(y) = 3e^{-3y}1_{(0,+\infty)}(y)$, i zmienne te są niezależne. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X+3Y$.

2. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości $g(x,y) = cxy1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)$.
   (a) Wyznaczyć stałą c (2 *pkt*);
   (b) Wyznaczyć rozkłady brzegowe X i Y (3 *pkt*);
   (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ (5 *pkt*).

3. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład normalny o średniej $(1,1)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.
   (a) Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i $2X+Y$(5 *pkt*).
   (b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $2X+Y+15$ (3 *pkt*).
   (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(2X+Y+15|Y)\right)$ (2 *pkt*).

4. Ze zbioru $\{1,2,\ldots,12\}$ losujemy ze zwracaniem 2 liczby. Niech zmienna losowa X opisuje ile razy wylosowano liczbę podzielną przez 3, zaś Y – przez 6. Wyznaczyć kowariancję X i Y (5 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(Y|X)$ (5 *pkt*).

5. W jajkach z niespodzianką może być jedna z 6 zabawek (zawartość różnych jajek jest niezależna). Kupujemy jajka do czasu, aż zbierzemy wszystkie 6 zabawek. Niech X oznacza liczbę jajek, jakie trzeba kupić a a wartość średnią X. Korzystając z nierówności Czebyszewa lub jej pochodnych oszacować z góry prawdopodobieństwo, że liczba zakupionych jajek wyniesie co najmniej $2a$ (5 *pkt*) oraz że liczba zakupionych jajek odchyli się od a o więcej niż trzy odchylenia standardowe X (5 *pkt*).

6. Gąsienica żyje na kukurydzy, która składa się z trzech segmentów: szczytu, środka i korzeni. Gąsienica może przebywać na każdym z segmentów. Każdego dnia, niezależnie, z prawdopodobieństwami $1/3$ i $2/3$ albo pada deszcz albo świeci słońce. Jeśli padał deszcz, to gąsienica ma tendencję do schodzenia w dół: z prawdopodobieństwem $2/3$ przesuwa się na niższy segment rośliny a z prawdopodobieństwem $1/3$ na wyższy (jeśli ruch nie jest możliwy to pozostaje na danym segmencie). Jeśli zaś świeci słońce, gąsienica ma tendencję do ruchu w górę: z prawdopodobieństwem $1/4$ przesuwa się na niższy segment rośliny a z prawdopodobieństwem $3/4$ na wyższy (jeśli ruch nie jest możliwy to pozostaje na danym segmencie). Jeśli gąsienica spędzi dwa kolejne dni na szczycie to zmienia się w motyla i odlatuje. Natomiast jeśli spędzi trzy kolejne dni w w korzeniach to ginie. Zaproponuj łańcuch Markowa modelujący życie gąsienicy (4 *pkt*). Dla gąsienicy będącej w środku oblicz prawdopodobieństwo zamiany w motyla (6 *pkt*).

7. Gracz A rzuca 420 razy sześcienną kostką do gry, zaś gracz B rzuca 420 razy symetryczną monetą. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, oszacować prawdopodobieństwo, że:
   (a) sumaryczna liczba oczek wyrzucona przez gracza A będzie mniejsza niż 1540 (5 *pkt*);
   (b) sumaryczna liczba oczek wyrzucona przez gracza A będzie większa niż pomnożona przez 7 liczba orłów wyrzuconych przez gracza B (5 *pkt*).

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$. Zbadać zbieżność prawie na pewno ciągów
   (a) $Y_n = \frac{\ln X_1 + \ln X_2 + \cdots + \ln X_n}{n}$ (5 *pkt*). *Wskazówka. Jeśli X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$, to $-\ln X$ ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.*
   (b) $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$ (5 *pkt*). *Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego podpunktu.*

$\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 4.02.2014r.

Wersja II

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Aby uzyskać maksimum punktów, należy rozwiązać 7 wybranych zadań z 8. Każde zadanie oceniane jest na skali 0-10 pkt.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, należy oddać 8 kartek. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Zmienna X ma rozkład o gęstości $g_X(x) = 4e^{-4x}1_{(0,+\infty)}(x)$, zaś zmienna Y – rozkład o gęstości $g_Y(y) = e^{-y}1_{(0,+\infty)}(y)$, i zmienne te są niezależne. Wyznaczyć rozkład zmiennej $4X + Y$.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości $g(x, y) = cx^2y1_{(0,x)}(y)1_{(0,1)}(x)$.
   (a) Wyznaczyć stałą c (2 *pkt*);
   (b) Wyznaczyć rozkłady brzegowe X i Y (3 *pkt*);
   (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (5 *pkt*).

3. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(2, 2)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.
   (a) Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i $X - Y$(5 *pkt*).
   (b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X - Y + 7$ (3 *pkt*).
   (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X - Y + 7|Y)\right)$ (2 *pkt*).

4. Ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 16\}$ losujemy ze zwracaniem 2 liczby. Niech zmienna losowa X opisuje ile razy wylosowano liczbę podzielną przez 4, zaś Y – przez 8. Wyznaczyć kowariancję X i Y (5 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(Y|X)$ (5 *pkt*).

5. W jajkach z niespodzianką może być jedna z 5 zabawek (zawartość różnych jajek jest niezależna). Kupujemy jajka do czasu, aż zbierzemy wszystkie 5 zabawek. Niech X oznacza liczbę jajek, jakie trzeba kupić a a wartość średnią X. Korzystając z nierówności Czebyszewa lub jej pochodnych oszacować z góry prawdopodobieństwo, że liczba zakupionych jajek wyniesie co najmniej $3a$ (5 *pkt*) oraz że liczba zakupionych jajek odchyli się od a o więcej niż dwa odchylenia standardowe X (5 *pkt*).

6. Gąsienica żyje na kukurydzy, która składa się z trzech segmentów: szczytu, środka i korzeni. Gąsienica może przebywać na każdym z segmentów. Każdego dnia, niezależnie, z prawdopodobieństwami 1/2 i 1/2 albo pada deszcz albo świeci słońce. Jeśli padał deszcz, to gąsienica ma tendencję do schodzenia w dół: z prawdopodobieństwem 2/3 przesuwa się na niższy segment rośliny a z prawdopodobieństwem 1/3 na wyższy (jeśli ruch nie jest możliwy to pozostaje na danym segmencie). Jeśli zaś świeci słońce, gąsienica ma tendencję do ruchu w górę: z prawdopodobieństwem 1/4 przesuwa się na niższy segment rośliny a z prawdopodobieństwem 3/4 na wyższy (jeśli ruch nie jest możliwy to pozostaje na danym segmencie). Jeśli gąsienica spędzi trzy kolejne dni na szczycie to zmienia się w motyla i odlatuje. Natomiast jeśli spędzi dwa kolejne dni w w korzeniach to ginie. Zaproponuj łańcuch Markowa modelujący życie gąsienicy (4 *pkt*). Dla gąsienicy będącej w środku oblicz prawdopodobieństwo zamiany w motyla (6 *pkt*).

7. Gracz A rzuca 105 razy sześcienną kostką do gry, zaś gracz B rzuca 105 razy symetryczną monetą. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, oszacować prawdopodobieństwo, że:
   (a) sumaryczna liczba oczek wyrzucona przez gracza A będzie większa niż 385 (5 *pkt*);
   (b) sumaryczna liczba oczek wyrzucona przez gracza A będzie mniejsza niż pomnożona przez 7 liczba orłów wyrzuconych przez gracza B (5 *pkt*).

8. Zmienne $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$. Zbadać zbieżność według prawdopodobieństwa ciągów
   (a) $Y_n = \frac{\ln X_1 + \ln X_2 + \cdots + \ln X_n}{n}$ (5 *pkt*). *Wskazówka. Jeśli X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$, to $-\ln X$ ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.*
   (b) $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$ (5 *pkt*). *Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego podpunktu.*

$\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 4.02.2014r.

Wersja III

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Aby uzyskać maksimum punktów, należy rozwiązać 7 wybranych zadań z 8. Każde zadanie oceniane jest na skali 0-10 pkt.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, należy oddać 8 kartek. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Zmienna X ma rozkład o gęstości $g_X(x) = 2e^{-2x}1_{(0,+\infty)}(x)$, zaś zmienna Y – rozkład o gęstości $g_Y(y) = 3e^{-3y}1_{(0,+\infty)}(y)$, i zmienne te są niezależne. Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + 3Y$.

2. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości $g(x, y) = cxy1_{(0,y)}(x)1_{(0,1)}(y)$.
   (a) Wyznaczyć stałą c (2 *pkt*);
   (b) Wyznaczyć rozkłady brzegowe X i Y (3 *pkt*);
   (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|Y)$ (5 *pkt*).

3. Wektor losowy (X, Y) ma rozkład normalny o średniej $(1, 1)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.
   (a) Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i $2X + Y$(5 *pkt*).
   (b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $2X + Y + 15$ (3 *pkt*).
   (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(2X + Y + 15|Y)\right)$ (2 *pkt*).

4. Ze zbioru $\{1, 2, \dots, 12\}$ losujemy ze zwracaniem 2 liczby. Niech zmienna losowa X opisuje ile razy wylosowano liczbę podzielną przez 3, zaś Y – przez 6. Wyznaczyć kowariancję X i Y (5 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(Y|X)$ (5 *pkt*).

5. W jajkach z niespodzianką może być jedna z 6 zabawek (zawartość różnych jajek jest niezależna). Kupujemy jajka do czasu, aż zbierzemy wszystkie 6 zabawek. Niech X oznacza liczbę jajek, jakie trzeba kupić a a wartość średnią X. Korzystając z nierówności Czebyszewa lub jej pochodnych oszacować z góry prawdopodobieństwo, że liczba zakupionych jajek wyniesie co najmniej $2a$ (5 *pkt*) oraz że liczba zakupionych jajek odchyli się od a o więcej niż trzy odchylenia standardowe X (5 *pkt*).

6. Gąsienica żyje na kukurydzy, która składa się z trzech segmentów: szczytu, środka i korzeni. Gąsienica może przebywać na każdym z segmentów. Każdego dnia, niezależnie, z prawdopodobieństwami 1/3 i 2/3 albo pada deszcz albo świeci słońce. Jeśli padał deszcz, to gąsienica ma tendencję do schodzenia w dół: z prawdopodobieństwem 2/3 przesuwa się na niższy segment rośliny a z prawdopodobieństwem 1/3 na wyższy (jeśli ruch nie jest możliwy to pozostaje na danym segmencie). Jeśli zaś świeci słońce, gąsienica ma tendencję do ruchu w górę: z prawdopodobieństwem 1/4 przesuwa się na niższy segment rośliny a z prawdopodobieństwem 3/4 na wyższy (jeśli ruch nie jest możliwy to pozostaje na danym segmencie). Jeśli gąsienica spędzi dwa kolejne dni na szczycie to zmienia się w motyla i odlatuje. Natomiast jeśli spędzi trzy kolejne dni w w korzeniach to ginie. Zaproponuj łańcuch Markowa modelujący życie gąsienicy (4 *pkt*). Dla gąsienicy będącej w środku oblicz prawdopodobieństwo zamiany w motyla (6 *pkt*).

7. Gracz A rzuca 420 razy sześcienną kostką do gry, zaś gracz B rzuca 420 razy symetryczną monetą. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, oszacować prawdopodobieństwo, że:
   (a) sumaryczna liczba oczek wyrzucona przez gracza A będzie mniejsza niż 1540 (5 *pkt*);
   (b) sumaryczna liczba oczek wyrzucona przez gracza A będzie większa niż pomnożona przez 7 liczba orłów wyrzuconych przez gracza B (5 *pkt*).

8. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$. Zbadać zbieżność prawie na pewno ciągów
   (a) $Y_n = \frac{\ln X_1 + \ln X_2 + \cdots + \ln X_n}{n}$ (5 *pkt*). *Wskazówka. Jeśli X ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$, to $-\ln X$ ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.*
   (b) $Z_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$ (5 *pkt*). *Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego podpunktu.*

$\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$

Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa, 4.02.2014r.

Wersja IV

Instrukcja:

- Uważnie przeczytaj treści zadań. W szczególności zwróć uwagę jakie polecenia są do wykonania w danym zadaniu.
- Aby uzyskać maksimum punktów, należy rozwiązać 7 wybranych zadań z 8. Każde zadanie oceniane jest na skali 0-10 pkt.
- Rozwiązanie każdego zadania należy pisać na **osobnej kartce**, należy oddać 8 kartek. Każda kartka musi być podpisana **czytelnie** i DRUKOWANYMI literami imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu i opatrzona numerem wersji i zadania, np.: „Zad. 3. Wersja I".
- W rozwiązaniu zadania należy przedstawić wszystkie obliczenia i objaśnić kluczowe kroki rozumowania (w szczególności opisać rozważane w rozwiązaniu zdarzenia, itp.), przywołać (z nazwy) używane fakty i wzory, etc. Za rozwiązanie zawierające sam wynik końcowy nie będą przyznawane żadne punkty.
- Nie wolno korzystać z notatek, książek czy kalkulatorów.
- Czas pisania egzaminu: 150 minut

---

1. Zmienna X ma rozkład o gęstości $g_X(x) = 4e^{-4x}1_{(0,+\infty)}(x)$, zaś zmienna Y – rozkład o gęstości $g_Y(y) = e^{-y}1_{(0,+\infty)}(y)$, i zmienne te są niezależne. Wyznaczyć rozkład zmiennej $4X+Y$.

2. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości $g(x,y) = cx^2y1_{(0,x)}(y)1_{(0,1)}(x)$.
   (a) Wyznaczyć stałą c (2 *pkt*);
   (b) Wyznaczyć rozkłady brzegowe X i Y (3 *pkt*);
   (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}(Y|X)$ (5 *pkt*).

3. Wektor losowy (X,Y) ma rozkład normalny o średniej $(2,2)$ i macierzy kowariancji $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.
   (a) Obliczyć współczynnik korelacji liniowej zmiennych X i $X-Y$(5 *pkt*).
   (b) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X-Y+7$ (3 *pkt*).
   (c) Wyznaczyć $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X-Y+7|Y)\right)$ (2 *pkt*).

4. Ze zbioru $\{1,2,\dots,16\}$ losujemy ze zwracaniem 2 liczby. Niech zmienna losowa X opisuje ile razy wylosowano liczbę podzielną przez 4, zaś Y – przez 8. Wyznaczyć kowariancję X i Y (5 *pkt*) oraz $\mathbb{E}(Y|X)$ (5 *pkt*).

5. W jajkach z niespodzianką może być jedna z 5 zabawek (zawartość różnych jajek jest niezależna). Kupujemy jajka do czasu, aż zbierzemy wszystkie 5 zabawek. Niech X oznacza liczbę jajek, jakie trzeba kupić a a wartość średnią X. Korzystając z nierówności Czebyszewa lub jej pochodnych oszacować z góry prawdopodobieństwo, że liczba zakupionych jajek wyniesie co najmniej $3a$ (5 *pkt*) oraz że liczba zakupionych jajek odchyli się od a o więcej niż dwa odchylenia standardowe X (5 *pkt*).

6. Gąsienica żyje na kukurydzy, która składa się z trzech segmentów: szczytu, środka i korzeni. Gąsienica może przebywać na każdym z segmentów. Każdego dnia, niezależnie, z prawdopodobieństwami $1/2$ i $1/2$ albo pada deszcz albo świeci słońce. Jeśli padał deszcz, to gąsienica ma tendencję do schodzenia w dół: z prawdopodobieństwem $2/3$ przesuwa się na niższy segment rośliny a z prawdopodobieństwem $1/3$ na wyższy (jeśli ruch nie jest możliwy to pozostaje na danym segmencie). Jeśli zaś świeci słońce, gąsienica ma tendencję do ruchu w górę: z prawdopodobieństwem $1/4$ przesuwa się na niższy segment rośliny a z prawdopodobieństwem $3/4$ na wyższy (jeśli ruch nie jest możliwy to pozostaje na danym segmencie). Jeśli gąsienica spędzi trzy kolejne dni na szczycie to zmienia się w motyla i odlatuje. Natomiast jeśli spędzi dwa kolejne dni w w korzeniach to ginie. Zaproponuj łańcuch Markowa modelujący życie gąsienicy (4 *pkt*). Dla gąsienicy będącej w środku oblicz prawdopodobieństwo zamiany w motyla (6 *pkt*).

7. Gracz A rzuca 105 razy sześcienną kostką do gry, zaś gracz B rzuca 105 razy symetryczną monetą. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, oszacować prawdopodobieństwo, że:
   (a) sumaryczna liczba oczek wyrzucona przez gracza A będzie większa niż 385 (5 *pkt*);
   (b) sumaryczna liczba oczek wyrzucona przez gracza A będzie mniejsza niż pomnożona przez 7 liczba orłów wyrzuconych przez gracza B (5 *pkt*).

8. Zmienne $X_1, X_2, \dots$ są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $(0,1)$. Zbadać zbieżność według prawdopodobieństwa ciągów
   (a) $Y_n = \frac{\ln X_1 + \ln X_2 + \cdots + \ln X_n}{n}$ (5 *pkt*). *Wskazówka. Jeśli* X *ma rozkład jednostajny na odcinku* $(0,1)$, *to* $-\ln X$ *ma rozkład wykładniczy z parametrem 1.*
   (b) $Z_n = (X_1X_2\cdots X_n)^{1/n}$ (5 *pkt*). *Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego podpunktu.*

$\Phi(1) \approx 0,841$, $\Phi(1,5) \approx 0,933$, $\Phi(2) \approx 0,977$, $\Phi(2,5) \approx 0,994$, $\Phi(3) \approx 0,9987$, $\Phi(4) \approx 0,99997$