**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 6 lutego 2017r., grupa A**

*Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyżej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.*

**1.** Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{3}{8}x\mathbb{1}_{\{0<x\leq y\leq 2x\leq 4\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ oraz $\mathbb{P}(Y \leq 1)$.

**2.** Zmienne losowe $X$, $Y$ są niezależne i mają rozkłady normalne o średniej $-1$ i wariancjach 1 i 2, odpowiednio.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $2X - Y + 2$.

b) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej $(2X - Y + 2, X + Y)$.

c) Obliczyć $\mathbb{E}\big((2X - Y + 2)^2 + (X + Y)^2 | X + Y\big)$.

**3.** Wilgotność względna powietrza w danym dniu jest zmienną losową o rozkładzie z gęstością $g(x) = \frac{1}{x\ln 2}\mathbb{1}_{[50,100]}(x)$. W przypadku gdy wilgotność wynosi $x$, siła sygnału emitowanego przez stację radiową jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $x/10$. Niech $X$, $Y$ oznaczają wilgotność oraz siłę sygnału w jutrzejszym dniu.

a) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X, Y)$ oraz gęstość zmiennej $Y$.

b) Obliczyć $\mathbb{P}(X \geq 75|Y)$.

**4.** Kwoty pieniędzy przeznaczonych na podróże przez kolejnych obywateli kraju $K_1$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_1$, $X_2$, ... o rozkładzie wykładniczym z parametrem $1/2$. Kwoty przeznaczone na podróże przez kolejnych obywateli kraju $K_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $Y_1$, $Y_2$, ... (niezależnymi także od $X_1$, $X_2$, ...) o rozkładzie wykładniczym z parametrem $1/3$.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna kwota przeznaczona na podróże przez 30 wybranych mieszkańców kraju $K_1$ różni się od łącznej kwoty przeznaczonej przez 20 wybranych mieszkańców kraju $K_2$ o co najmniej 50.

b) Czy ciąg $\frac{X_1+Y_1+X_2+Y_2+\ldots+X_n+Y_n}{2n+5}$, $n = 1, 2, \ldots$, jest zbieżny prawie na pewno? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, podać granicę.

**5.** W związku z ogłoszoną loterią, do kiosku zgłasza się 600 klientów, z których każdy kupuje jeden, dwa lub trzy losy (wybór każdej liczby jest tak samo prawdopodobny).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że kiosk sprzeda więcej niż 1220 losów.

b) Każdy los kosztuje 10 zł, statystycznie co dziesiąty klient płaci kartą. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że ilość gotówki uzyskana ze sprzedaży losów będzie mniejsza niż 11 000 zł.

**6.** Każdego dnia pan Nowak idzie na zakupy do jednego z trzech sklepów $S_1$, $S_2$, $S_3$. Jeśli w danym dniu pan Nowak uzyska rabat w sklepie który wybrał, to następnego dnia dokonuje zakupów w tym samym sklepie; w przeciwnym razie wybiera jeden z dwóch pozostałych (każdy wybór ma tę samą szansę). Prawdopodobieństwa uzyskania rabatu w sklepach $S_1$, $S_2$, $S_3$ wynoszą odpowiednio $1/2$, $1/3$ i $1/5$. Pierwszego dnia pan Nowak udał się do sklepu $S_1$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzeciego dnia pan Nowak uda się do sklepu $S_3$.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że setnego dnia pan Nowak uda się do sklepu $S_3$.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w setnym dniu pan Nowak dostanie rabat.

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 6 lutego 2017r., grupa B**

*Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyżej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.*

**1.** Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X,Y)$ ma rozkład z gęstością $g(x,y) = \frac{3}{16}x\mathbb{1}_{\{0<x\le y\le 3x\le 6\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Cov}(X,Y)$ oraz $\mathbb{P}(Y \le 2)$.

**2.** Zmienne losowe $X$, $Y$ są niezależne i mają rozkłady normalne o średniej $-2$ i wariancjach 2 i 1, odpowiednio.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X - 2Y + 1$.

b) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej $(X - 2Y + 1, X + Y)$.

c) Obliczyć $\mathbb{E}\big((X + Y)^2 + (X - 2Y + 1)^2 | X - 2Y + 1\big)$.

**3.** Wilgotność względna powietrza w danym dniu jest zmienną losową o rozkładzie z gęstością $g(x) = \frac{1}{x\ln 2}\mathbb{1}_{[40,80]}(x)$. W przypadku gdy wilgotność wynosi $x$, siła sygnału emitowanego przez stację radiową jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $x/20$. Niech $X$, $Y$ oznaczają wilgotność oraz siłę sygnału w jutrzejszym dniu.

a) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X,Y)$ oraz gęstość zmiennej $Y$.

b) Obliczyć $\mathbb{P}(X \ge 60|Y)$.

**4.** Kwoty pieniędzy przeznaczonych na podróże przez kolejnych obywateli kraju $K_1$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_1$, $X_2$, ... o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1/3. Kwoty przeznaczone na podróże przez kolejnych obywateli kraju $K_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $Y_1$, $Y_2$, ... (niezależnymi także od $X_1$, $X_2$, ...) o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1/2.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna kwota przeznaczona na podróże przez 20 wybranych mieszkańców kraju $K_1$ różni się od łącznej kwoty przeznaczonej przez 30 wybranych mieszkańców kraju $K_2$ o co najmniej 40.

b) Czy ciąg $\frac{X_1+Y_1+X_2+Y_2+\ldots+X_n+Y_n}{3n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, jest zbieżny prawie na pewno? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, podać granicę.

**5.** W związku z ogłoszoną loterią, do kiosku zgłasza się 360 klientów, z których każdy kupuje jeden, trzy lub cztery losy (wybór każdej liczby jest tak samo prawdopodobny).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że kiosk sprzeda więcej niż 1000 losów.

b) Każdy los kosztuje 10 zł, statystycznie co czwarty klient płaci kartą. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że ilość gotówki uzyskana ze sprzedaży losów będzie mniejsza niż 7 230 zł.

**6.** Każdego dnia pan Nowak idzie na zakupy do jednego z trzech sklepów $S_1$, $S_2$, $S_3$. Jeśli w danym dniu pan Nowak uzyska rabat w sklepie który wybrał, to następnego dnia dokonuje zakupów w tym samym sklepie; w przeciwnym razie wybiera jeden z dwóch pozostałych (każdy wybór ma tę samą szansę). Prawdopodobieństwa uzyskania rabatu w sklepach $S_1$, $S_2$, $S_3$ wynoszą odpowiednio 1/2, 1/5 i 1/7. Pierwszego dnia pan Nowak udał się do sklepu $S_1$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzeciego dnia pan Nowak uda się do sklepu $S_3$.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że setnego dnia pan Nowak uda się do sklepu $S_3$.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w setnym dniu pan Nowak dostanie rabat.

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 6 lutego 2017r., grupa C**

*Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyżej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.*

**1.** Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{1}{9}x\mathbb{1}_{\{0<x\leq y\leq 2x\leq 6\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ oraz $\mathbb{P}(Y \leq 2)$.

**2.** Zmienne losowe $X$, $Y$ są niezależne i mają rozkłady normalne o średniej $-1$ i wariancjach 3 i 2, odpowiednio.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $2X - 3Y - 2$.

b) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej $(2X - 3Y - 2, X + Y)$.

c) Obliczyć $\mathbb{E}\big((2X - 3Y - 2)^2 + (X + Y)^2|2X - 3Y - 2\big)$.

**3.** Wilgotność względna powietrza w danym dniu jest zmienną losową o rozkładzie z gęstością $g(x) = \frac{1}{x \ln 2}\mathbb{1}_{[30,60]}(x)$. W przypadku gdy wilgotność wynosi $x$, siła sygnału emitowanego przez stację radiową jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $x/30$. Niech $X$, $Y$ oznaczają wilgotność oraz siłę sygnału w jutrzejszym dniu.

a) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X, Y)$ oraz gęstość zmiennej $Y$.

b) Obliczyć $\mathbb{P}(X \geq 40|Y)$.

**4.** Kwoty pieniędzy przeznaczonych na podróże przez kolejnych obywateli kraju $K_1$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_1$, $X_2$, ... o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1/3. Kwoty przeznaczone na podróże przez kolejnych obywateli kraju $K_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $Y_1$, $Y_2$, ... (niezależnymi także od $X_1$, $X_2$, ...) o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1/4.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna kwota przeznaczona na podróże przez 20 wybranych mieszkańców kraju $K_1$ różni się od łącznej kwoty przeznaczonej przez 15 wybranych mieszkańców kraju $K_2$ o co najmniej 50.

b) Czy ciąg $\frac{X_1+Y_1+X_2+Y_2+...+X_n+Y_n}{5n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, jest zbieżny prawie na pewno? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, podać granicę.

**5.** W związku z ogłoszoną loterią, do kiosku zgłasza się 150 klientów, z których każdy kupuje dwa, trzy lub cztery losy (wybór każdej liczby jest tak samo prawdopodobny).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że kiosk sprzeda mniej niż 460 losów.

b) Każdy los kosztuje 10 zł, statystycznie co trzeci klient płaci kartą. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że ilość gotówki uzyskana ze sprzedaży losów będzie większa niż 3 110 zł.

**6.** Każdego dnia pan Nowak idzie na zakupy do jednego z trzech sklepów $S_1$, $S_2$, $S_3$. Jeśli w danym dniu pan Nowak uzyska rabat w sklepie który wybrał, to następnego dnia dokonuje zakupów w tym samym sklepie; w przeciwnym razie wybiera jeden z dwóch pozostałych (każdy wybór ma tę samą szansę). Prawdopodobieństwa uzyskania rabatu w sklepach $S_1$, $S_2$, $S_3$ wynoszą odpowiednio 1/3, 1/5 i 1/7. Pierwszego dnia pan Nowak udał się do sklepu $S_1$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzeciego dnia pan Nowak uda się do sklepu $S_3$.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że setnego dnia pan Nowak uda się do sklepu $S_3$.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w setnym dniu pan Nowak dostanie rabat.

**Egzamin z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 6 lutego 2017r., grupa D**

*Czas trwania egzaminu: 120 minut. Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, czytelnie podpisanej imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10 pkt, wynikiem końcowym egzaminu jest suma punktów uzyskana z pięciu najwyżej ocenionych zadań. Tablice rozkładu normalnego są niepotrzebne, należy operować jego dystrybuantą.*

**1.** Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)$ ma rozkład z gęstością $g(x, y) = \frac{1}{18} x \mathbb{1}_{\{0<x\le y\le 3x\le 9\}}$. Obliczyć $\mathbb{E}X$, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ oraz $\mathbb{P}(Y \le 1)$.

**2.** Zmienne losowe $X$, $Y$ są niezależne i mają rozkłady normalne o średniej $-2$ i wariancjach 3 i 1, odpowiednio.

a) Wyznaczyć rozkład zmiennej $X - 3Y + 1$.

b) Wyznaczyć macierz kowariancji zmiennej $(X - 3Y + 1, X + Y)$.

c) Obliczyć $\mathbb{E}\big((X + Y)^2 + (X - 3Y + 1)^2 | X + Y\big)$.

**3.** Wilgotność względna powietrza w danym dniu jest zmienną losową o rozkładzie z gęstością $g(x) = \frac{1}{x \ln 2} \mathbb{1}_{[20,40]}(x)$. W przypadku gdy wilgotność wynosi $x$, siła sygnału emitowanego przez stację radiową jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $x/20$. Niech $X$, $Y$ oznaczają wilgotność oraz siłę sygnału w jutrzejszym dniu.

a) Wyznaczyć gęstość zmiennej $(X, Y)$ oraz gęstość zmiennej $Y$.

b) Obliczyć $\mathbb{P}(X \ge 30|Y)$.

**4.** Kwoty pieniędzy przeznaczonych na podróże przez kolejnych obywateli kraju $K_1$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $X_1$, $X_2$, ... o rozkładzie wykładniczym z parametrem $1/2$. Kwoty przeznaczone na podróże przez kolejnych obywateli kraju $K_2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi $Y_1$, $Y_2$, ... (niezależnymi także od $X_1$, $X_2$, ...) o rozkładzie wykładniczym z parametrem $1/4$.

a) Korzystając z nierówności Czebyszewa-Bienaymé, oszacować prawdopodobieństwo tego, że łączna kwota przeznaczona na podróże przez 40 wybranych mieszkańców kraju $K_1$ różni się od łącznej kwoty przeznaczonej przez 20 wybranych mieszkańców kraju $K_2$ o co najmniej 50.

b) Czy ciąg $\frac{X_1+Y_1+X_2+Y_2+\ldots+X_n+Y_n}{4n-3}$, $n = 1, 2, \ldots$, jest zbieżny prawie na pewno? W przypadku odpowiedzi pozytywnej, podać granicę.

**5.** W związku z ogłoszoną loterią, do kiosku zgłasza się 450 klientów, z których każdy kupuje jeden, dwa lub cztery losy (wybór każdej liczby jest tak samo prawdopodobny).

a) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że kiosk sprzeda mniej niż 1100 losów.

b) Każdy los kosztuje 10 zł, statystycznie co siódmy klient płaci kartą. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że ilość gotówki uzyskana ze sprzedaży losów będzie większa niż 9 300 zł.

**6.** Każdego dnia pan Nowak idzie na zakupy do jednego z trzech sklepów $S_1$, $S_2$, $S_3$. Jeśli w danym dniu pan Nowak uzyska rabat w sklepie który wybrał, to następnego dnia dokonuje zakupów w tym samym sklepie; w przeciwnym razie wybiera jeden z dwóch pozostałych (każdy wybór ma tę samą szansę). Prawdopodobieństwa uzyskania rabatu w sklepach $S_1$, $S_2$, $S_3$ wynoszą odpowiednio $1/2$, $1/3$ i $1/7$. Pierwszego dnia pan Nowak udał się do sklepu $S_1$.

a) Obliczyć prawdopodobieństwo, że trzeciego dnia pan Nowak uda się do sklepu $S_3$.

b) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że setnego dnia pan Nowak uda się do sklepu $S_3$.

c) Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo, że w setnym dniu pan Nowak dostanie rabat.