

**Egzamin Poprawkowy z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5.03.2015**  
**grupa A**

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa A). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. W jednej urnie znajduje się 5 prawdziwych monet, a w drugiej dwie — jedna prawdziwa i jedna fałszywa, z dwoma orłami. Losujemy urnę, następnie monetę i wylosowaną monetę wykonujemy dwa rzuty. Oblicz prawdopodobieństwo, że
  - (a) orzeł wypadnie choć raz;
  - (b) wylosowaliśmy monetę fałszywą, jeśli wiadomo, że orzeł wypadł w obydwu rzutach.
2. W pewnej korporacji  $\frac{2}{3}$  pracowników stanowią pracownicy szeregowi, natomiast  $\frac{1}{3}$  to pracownicy wyższego szczebla. Miesięczne zarobki losowego pracownika szeregowego mają rozkład jednostajny na przedziale  $[1000, 2000]$ , natomiast miesięczne zarobki losowego pracownika wyższego szczebla mają rozkład o dystrybucji

$$F(t) = \begin{cases} 0; & t < 2000 \\ 1 - (\frac{2000}{t})^2; & t \geq 2000. \end{cases}$$

Przez  $X$  oznaczmy miesięczne zarobki losowo wybranego pracownika korporacji.

- (a) Podaj dystrybuantę i medianę zmiennej losowej  $X$ .
  - (b) Oblicz  $\mathbb{E}X$ .
  - (c) Rozstrzygnij, czy istnieje skończona wariancja zmiennej  $X$ . Odpowiedź uzasadnij!
3. Rozkład łączny zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  ma gęstość  $g(x, y) = C \frac{1}{x^4} 1_{\{x \geq 1\}} 1_{\{x-1 \leq y \leq x+1\}}$ .
    - (a) Oblicz stałą  $C$ .
    - (b) Znajdź gęstość rozkładu zmiennej  $X$  oraz  $\mathbb{P}(X > 2)$ .
    - (c) Oblicz  $\mathbb{E}X$  oraz  $\text{Cov}(X, Y)$ .
  4. Niech  $D$  oznacza dochód Pana X, handlowca będącego dystrybutorem kosmetyków sieci A. Załóżmy, że zależy on od wyników jego własnej sprzedaży (25% od wartości sprzedanych towarów) oraz od wyników sprzedaży dystrybutorów zachęconych przez niego do współpracy z siecią (10% od wartości sprzedanych towarów). Załóżmy dalej, że liczba handlowców zachęconych przez Pana X (ozn.  $K$ ), jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 6 i  $\frac{2}{3}$ , oraz że jeśli sprzedaż prowadzi  $k$  zachęconych osób, to wypracowana przez nie miesięczna sprzedaż ma rozkład jednostajny na przedziale  $[0, 1500k]$ , zaś sprzedaż wypracowana przez Pana X jest zmienną losową o średniej 2000. Wyznaczyć średni miesięczny dochód Pana X oraz  $\text{Cov}(K, D)$ .
  5. Wartości towarów zakupionych przez klientów w sklepie odzieżowym są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 100 i odchyleniu standardowym 100. Przybliżyc prawdopodobieństwo, że łączny przychód dla 400 klientów nie przekroczy 36000. Załóżmy teraz, że podczas pierwszej wizyty każdy klient przy zakupie dostaje kupon rabatowy – zniżkę 50% na kolejne zakupy. Przybliżyc prawdopodobieństwo, że łączny przychód z dwukrotnej wizyty 500 klientów przekroczy 77500.
  6. W pewnej gospodarce można zaobserwować następujący mechanizm zmiany sektorów zatrudnienia pracowników (zakładamy, że każda osoba zatrudniona może co pół roku zmienić sektor zatrudnienia). I tak: jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w rolnictwie, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$  zmieni sektor na usługi, a z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$  na przemysł; jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w przemyśle, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$  zmieni sektor na usługi; jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w sektorze usług, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{10}$  zmieni sektor na rolnictwo; w pozostałych przypadkach, pracownik nie zmienia sektora zatrudnienia. Wyznaczyć:
    - (a) prawdopodobieństwo, że osoba zatrudniona w sektorze usług w I półroczu 2015 będzie zatrudniona w tym samym sektorze w I półroczu 2016;
    - (b) średni czas, po jakim pracownik zatrudniony w rolnictwie w I półroczu 2015 roku zatrudni się w sektorze usług;
    - (c) długookresową strukturę zatrudnienia w opisywanej gospodarce.

---

$$\Phi(0) = 0, 5, \Phi(1) \approx 0, 841, \Phi(1, 5) \approx 0, 933, \Phi(2) \approx 0, 977, \Phi(2, 5) \approx 0, 994, \Phi(3) \approx 0, 9987, \Phi(4) \approx 0, 99997$$

**Egzamin Poprawkowy z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5.03.2015**  
**grupa B**

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa B). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. W jednej urnie znajdują się 4 prawdziwe monety, a w drugiej trzy — jedna prawdziwa i dwie fałszywe, każda z dwoma orłami. Losujemy urnę, następnie monetę i wylosowaną monetę wykonujemy dwa rzuty. Oblicz prawdopodobieństwo, że
  - (a) orzeł wypadnie choć raz;
  - (b) wylosowaliśmy monetę fałszywą, jeśli wiadomo, że orzeł wypadł w obydwu rzutach.
2. W pewnej korporacji  $3/4$  pracowników stanowią pracownicy szeregowi, natomiast  $1/4$  to pracownicy wyższego szczebla. Miesięczne zarobki losowego pracownika szeregowego mają rozkład jednostajny na przedziale  $[2000, 3000]$ , natomiast miesięczne zarobki losowego pracownika wyższego szczebla mają rozkład o dystrybucji

$$F(t) = \begin{cases} 0; & t < 3000 \\ 1 - (\frac{3000-t}{3000})^2; & t \geq 3000. \end{cases}$$

Przez  $X$  oznaczmy miesięczne zarobki losowo wybranego pracownika korporacji.

- (a) Podaj dystrybuantę i medianę zmiennej losowej  $X$ .
  - (b) Oblicz  $\mathbb{E}X$ .
  - (c) Rozstrzygnij, czy istnieje skończona wariancja zmiennej  $X$ . Odpowiedź uzasadnij!
3. Rozkład łączny zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  ma gęstość  $g(x, y) = C \frac{1}{x^5} 1_{\{x \geq 1\}} 1_{\{x \leq y \leq x+2\}}$ .
  - (a) Oblicz stałą  $C$ .
  - (b) Znajdź gęstość rozkładu zmiennej  $X$  oraz  $\mathbb{P}(X > 3)$ .
  - (c) Oblicz  $\mathbb{E}X$  oraz  $\text{Cov}(X, Y)$ .
4. Niech  $D$  oznacza dochód Pana X, handlowca będącego dystrybutorem kosmetyków sieci A. Załóżmy, że zależy on od wyników jego własnej sprzedaży (10% od wartości sprzedanych towarów) oraz od wyników sprzedaży dystrybutorów zachęconych przez niego do współpracy z siecią (5% od wartości sprzedanych towarów). Załóżmy dalej, że liczba handlowców zachęconych przez Pana X (ozn.  $K$ ), jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 4 i  $\frac{1}{2}$ , oraz że jeśli sprzedaż prowadzi  $k$  zachęconych osób, to wypracowana przez nie miesięczna sprzedaż ma rozkład jednostajny na przedziale  $[0, 1000k]$ , zaś sprzedaż wypracowana przez Pana X jest zmienną losową o średniej 1500. Wyznaczyć średni miesięczny dochód Pana X oraz  $\text{Cov}(K, D)$ .
5. Wartości towarów zakupionych przez klientów w sklepie odzieżowym są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 50 i odchyleniu standardowym 100. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że łączny przychód dla 400 klientów nie przekroczy 21000. Załóżmy teraz, że podczas pierwszej wizyty każdy klient przy zakupie dostaje kupon rabatowy – zniżkę 50% na kolejne zakupy. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że łączny przychód z dwukrotnej wizyty 500 klientów przekroczy 30000.
6. W pewnej gospodarce można zaobserwować następujący mechanizm zmiany sektorów zatrudnienia pracowników (zakładamy, że każda osoba zatrudniona może co pół roku zmienić sektor zatrudnienia). I tak: jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w rolnictwie, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  zmieni sektor na usługi, a z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  na przemysł; jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w przemyśle, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{6}$  zmieni sektor na usługi; jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w sektorze usług, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{6}$  zmieni sektor na rolnictwo; w pozostałych przypadkach, pracownik nie zmienia sektora zatrudnienia. Wyznaczyć:
  - (a) prawdopodobieństwo, że osoba zatrudniona w sektorze usług w I półroczu 2015 będzie zatrudniona w tym samym sektorze w I półroczu 2016;
  - (b) średni czas, po jakim pracownik zatrudniony w rolnictwie w I półroczu 2015 roku zatrudni się w sektorze usług;
  - (c) długookresową strukturę zatrudnienia w opisywanej gospodarce.

---

$$\Phi(0) = 0,5, \Phi(1) \approx 0,841, \Phi(1,5) \approx 0,933, \Phi(2) \approx 0,977, \Phi(2,5) \approx 0,994, \Phi(3) \approx 0,9987, \Phi(4) \approx 0,99997$$

**Egzamin Poprawkowy z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5.03.2015**  
**grupa C**

*Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa C). Czas trwania egzaminu: 120 min.*

1. W jednej urnie znajduje się 6 prawdziwych monet, a w drugiej trzy — dwie prawdziwe i jedna fałszywa, z dwoma reszkami. Losujemy urnę, następnie monetę i wylosowaną monetą wykonujemy dwa rzuty. Oblicz prawdopodobieństwo, że
  - (a) reszka wypadnie choć raz;
  - (b) wylosowaliśmy monetę fałszywą, jeśli wiadomo, że reszka wypadła w obydwu rzutach.
2. W pewnej korporacji  $\frac{3}{5}$  pracowników stanowią pracownicy szeregowi, natomiast  $\frac{2}{5}$  to pracownicy wyższego szczebla. Miesięczne zarobki losowego pracownika szeregowego mają rozkład jednostajny na przedziale  $[1000, 2000]$ , natomiast miesięczne zarobki losowego pracownika wyższego szczebla mają rozkład o dystrybucji

$$F(t) = \begin{cases} 0; & t < 2000 \\ 1 - (\frac{2000}{t})^2; & t \geq 2000. \end{cases}$$

Przez  $X$  oznaczmy miesięczne zarobki losowo wybranego pracownika korporacji.

- (a) Podaj dystrybuantę i medianę zmiennej losowej  $X$ .
  - (b) Oblicz  $\mathbb{E}X$ .
  - (c) Rozstrzygnij, czy istnieje skończona wariancja zmiennej  $X$ . Odpowiedź uzasadnij!
3. Rozkład łączny zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  ma gęstość  $g(x, y) = C \frac{1}{y^4} \mathbf{1}_{\{y \geq 1\}} \mathbf{1}_{\{y-1 \leq x \leq y+1\}}$ .
    - (a) Oblicz stałą  $C$ .
    - (b) Znajdź gęstość rozkładu zmiennej  $Y$  oraz  $\mathbb{P}(Y > 2)$ .
    - (c) Oblicz  $\mathbb{E}Y$  oraz  $\text{Cov}(X, Y)$ .
  4. Niech  $D$  oznacza dochód Pana X, handlowca będącego dystrybutorem kosmetyków sieci A. Załóżmy, że zależy on od wyników jego własnej sprzedaży (20% od wartości sprzedanych towarów) oraz od wyników sprzedaży dystrybutorów zachęconych przez niego do współpracy z siecią (10% od wartości sprzedanych towarów). Załóżmy dalej, że liczba handlowców zachęconych przez Pana X (ozn.  $K$ ), jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 5 i  $\frac{3}{5}$ , oraz że jeśli sprzedaż prowadzi  $k$  zachęconych osób, to wypracowana przez nie miesięczna sprzedaż ma rozkład jednostajny na przedziale  $[0, 1500k]$ , zaś sprzedaż wypracowana przez Pana X jest zmienną losową o średniej 2000. Wyznaczyć średni miesięczny dochód Pana X oraz  $\text{Cov}(K, D)$ .
  5. Wartości towarów zakupionych przez klientów w sklepie odzieżowym są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 100 i odchyleniu standardowym 100. Przybliżyc prawdopodobieństwo, że łączny przychód dla 400 klientów przekroczy 36000. Załóżmy teraz, że podczas pierwszej wizyty każdy klient przy zakupie dostaje kupon rabatowy – zniżkę 50% na kolejne zakupy. Przybliżyc prawdopodobieństwo, że łączny przychód z dwukrotnej wizyty 500 klientów nie przekroczy 77500.
  6. W pewnej gospodarce można zaobserwować następujący mechanizm zmiany sektorów zatrudnienia pracowników (zakładamy, że każda osoba zatrudniona może co pół roku zmienić sektor zatrudnienia). I tak: jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w przemyśle, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$  zmieni sektor na usługi, a z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$  na rolnictwo; jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w rolnictwie, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{4}$  zmieni sektor na usługi; jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w sektorze usług, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{10}$  zmieni sektor na przemysł; w pozostałych przypadkach, pracownik nie zmienia sektora zatrudnienia. Wyznaczyć:
    - (a) prawdopodobieństwo, że osoba zatrudniona w sektorze usług w I półroczu 2015 będzie zatrudniona w tym samym sektorze w I półroczu 2016;
    - (b) średni czas, po jakim pracownik zatrudniony w rolnictwie w I półroczu 2015 roku zatrudni się w sektorze usług;
    - (c) długookresową strukturę zatrudnienia w opisywanej gospodarce.

---

$$\Phi(0) = 0, 5, \Phi(1) \approx 0, 841, \Phi(1, 5) \approx 0, 933, \Phi(2) \approx 0, 977, \Phi(2, 5) \approx 0, 994, \Phi(3) \approx 0, 9987, \Phi(4) \approx 0, 99997$$

**Egzamin Poprawkowy z Rachunku Prawdopodobieństwa WNE - 5.03.2015**  
**grupa D**

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej kartce, należy oddać 6 kartek. Maksimum punktów można uzyskać za poprawne rozwiązanie 5 zadań z 6. Każde z zadań będzie punktowane w skali 0 – 10pkt. Proszę czytelnie podpisać każdą kartkę imieniem i nazwiskiem oraz numerem indeksu i oznaczyć wersją egzaminu (np. grupa D). Czas trwania egzaminu: 120 min.

1. W jednej urnie znajduje się 7 prawdziwych monet, a w drugiej cztery — jedna prawdziwa i trzy fałszywe, każda z dwoma reszkami. Losujemy urnę, następnie monetę i wylosowaną monetą wykonujemy dwa rzuty. Oblicz prawdopodobieństwo, że
  - (a) reszka wypadnie choć raz;
  - (b) wylosowaliśmy monetę fałszywą, jeśli wiadomo, że reszka wypadła w obydwu rzutach.

2. W pewnej korporacji  $\frac{4}{5}$  pracowników stanowią pracownicy szeregowi, natomiast  $\frac{1}{5}$  to pracownicy wyższego szczebla. Miesięczne zarobki losowego pracownika szeregowego mają rozkład jednostajny na przedziale  $[2000, 3000]$ , natomiast miesięczne zarobki losowego pracownika wyższego szczebla mają rozkład o dystrybucji

$$F(t) = \begin{cases} 0; & t < 3000 \\ 1 - (\frac{3000-t}{3000})^2; & t \geq 3000. \end{cases}$$

Przez  $X$  oznaczmy miesięczne zarobki losowo wybranego pracownika korporacji.

- (a) Podaj dystrybuantę i medianę zmiennej losowej  $X$ .
  - (b) Oblicz  $\mathbb{E}X$ .
  - (c) Rozstrzygnij, czy istnieje skończona wariancja zmiennej  $X$ . Odpowiedź uzasadnij!
3. Rozkład łączny zmiennych losowych  $X$  i  $Y$  ma gęstość  $g(x, y) = C \frac{1}{y^3} 1_{\{y \geq 1\}} 1_{\{y \leq x \leq y+2\}}$ .
    - (a) Oblicz stałą  $C$ .
    - (b) Znajdź gęstość rozkładu zmiennej  $Y$  oraz  $\mathbb{P}(Y > 3)$ .
    - (c) Oblicz  $\mathbb{E}Y$  oraz  $\text{Cov}(X, Y)$ .
  4. Niech  $D$  oznacza dochód Pana X, handlowca będącego dystrybutorem kosmetyków sieci A. Załóżmy, że zależy on od wyników jego własnej sprzedaży (20% od wartości sprzedanych towarów) oraz od wyników sprzedaży dystrybutorów zachęconych przez niego do współpracy z siecią (5% od wartości sprzedanych towarów). Załóżmy dalej, że liczba handlowców zachęconych przez Pana X (ozn.  $K$ ), jest zmienną losową z rozkładu Bernoulliego z parametrami 8 i  $\frac{1}{2}$ , oraz że jeśli sprzedaż prowadzi  $k$  zachęconych osób, to wypracowana przez nie miesięczna sprzedaż ma rozkład jednostajny na przedziale  $[0, 1000k]$ , zaś sprzedaż wypracowana przez Pana X jest zmienną losową o średniej 1500. Wyznaczyć średni miesięczny dochód Pana X oraz  $\text{Cov}(K, D)$ .
  5. Wartości towarów zakupionych przez klientów w sklepie odzieżowym są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu o średniej 50 i odchyleniu standardowym 100. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że łączny przychód dla 400 klientów przekroczy 21000. Załóżmy teraz, że podczas pierwszej wizyty każdy klient przy zakupie dostaje kupon rabatowy – zniżkę 50% na kolejne zakupy. Przybliżyć prawdopodobieństwo, że łączny przychód z dwukrotnej wizyty 500 klientów nie przekroczy 30000.
  6. W pewnej gospodarce można zaobserwować następujący mechanizm zmiany sektorów zatrudnienia pracowników (zakładamy, że każda osoba zatrudniona może co pół roku zmienić sektor zatrudnienia). I tak: jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w przemyśle, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  zmieni sektor na usługi, a z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{3}$  na rolnictwo; jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w rolnictwie, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{6}$  zmieni sektor na usługi; jeśli ktoś w danym półroczu był zatrudniony w sektorze usług, to w kolejnym z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{6}$  zmieni sektor na przemysł; w pozostałych przypadkach, pracownik nie zmienia sektora zatrudnienia. Wyznaczyć:
    - (a) prawdopodobieństwo, że osoba zatrudniona w sektorze usług w I półroczu 2015 będzie zatrudniona w tym samym sektorze w I półroczu 2016;
    - (b) średni czas, po jakim pracownik zatrudniony w rolnictwie w I półroczu 2015 roku zatrudni się w sektorze usług;
    - (c) długookresową strukturę zatrudnienia w opisywanej gospodarce.

---

$$\Phi(0) = 0, 5, \Phi(1) \approx 0, 841, \Phi(1, 5) \approx 0, 933, \Phi(2) \approx 0, 977, \Phi(2, 5) \approx 0, 994, \Phi(3) \approx 0, 9987, \Phi(4) \approx 0, 99997$$