Elementy Analizy Matematycznej, WNE, 2007/2008

22 stycznia 2008

1 Ciągi i indukcja matematyczna

Oznaczenia:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ - zbiór liczb naturalnych,
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ - zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych,
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych.
Uwaga: Zbiór liczb naturalnych jest to najmniejszy zbiór posiadający następujące własności.
(i) $0 \in \mathbb{N}$,
(ii) Jeśli $n \in \mathbb{N}$, to $n + 1 \in \mathbb{N}$.

1. Zasada indukcji matematycznej: Jeśli pewne twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$ oraz z prawdziwości twierdzenia dla n wynika jego prawdziwość dla $n + 1$, to twierdzenie jest prawdziwe dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich.

Przykład: dwumian Newtona. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi wzór

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}, \quad (1)$$

gdzie $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona) zadany jest przez

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Powyższa definicja symbolu Newtona ma sens nawet wtedy, gdy n jest liczbą rzeczywistą (ale k musi być liczbą naturalną).

Dowód: Skorzystamy z zasady indukcji. Dla $n = 1$ otrzymujemy oczywistą równość $a+b = a+b$. Przypuśćmy, że wzór (1) jest prawdziwy dla ustalonego n. Mamy

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n)(a+b)$$

$$\begin{aligned} &= a^{n+1} + \binom{n}{1}a^n b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^2b^{n-1} + ab^n \\ &\qquad + a^n b + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-1} + \binom{n}{n-1}ab^n + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n+1}{n-1}a^2b^{n-1} + \binom{n+1}{n}ab^n + b^{n+1}, \end{aligned}$$

czyli wzór (1) jest prawdziwy dla $n+1$. Na mocy zasady indukcji, wzór ten jest prawdziwy dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej. W ostatnim przejściu skorzystaliśmy z równości

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

prawdziwej dla dowolnej liczby naturalnej n. □

Przykład: nierówność Bernoulliego. Załóżmy, iż $n \geq 1$ jest liczbą naturalną oraz x jest liczbą rzeczywistą większą niż -1. Wówczas

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{2}$$

Równość ma miejsce tylko dla $n = 1$ bądź $x = 0$.

Dowód: Dla $n = 1$ nierówność jest prawdziwa i staje się równością (nawet dla wszystkich x; tu nie potrzebujemy założenia $x > -1$). Przypuśćmy, iż udowodniliśmy nierówność (2) dla pewnego $n \geq 1$. Wobec tego,

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \qquad \text{(założenie indukcyjne)} \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x, \end{aligned}$$

przy czym dostajemy równość wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Uzyskaliśmy więc nierówność (2) dla $n+1$. Na mocy zasady indukcji, nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $n \geq 1$. □

2. Wartość bezwzględna i odległość w zbiorze liczb rzeczywistych. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Wówczas $|a-b|$ możemy interpretować jako odległość między liczbami a, b.

Lemat 1.1. *Niech a, b, c, x, y będą liczbami rzeczywistymi. Zachodzą następujące nierówności.*

(i) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(nierówność trójkąta).*

(ii) $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

(iii) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$.

Dowód: (i) Obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu do kwadratu dostajemy równoważną nierówność $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$, czyli

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2,$$

$$xy \leq |x||y|.$$

Ostatnia nierówność oczywiście ma miejsce.

(ii) Postępujemy analogicznie jak w (i).

(iii) Postawiamy $x = a-b$, $y = b-c$ i otrzymujemy udowodnioną już nierówność trójkąta. □

3. Definicja ciągu. Ciągiem (nieskończonym) nazywamy funkcję określoną na zbiorze wszystkich liczb całkowitych większych bądź równych pewnej liczbie całkowitej n_0. Wartość tej funkcji w punkcie n nazywamy n-tym wyrazem ciągu.

Oznaczenie: $(a_n)_{n\geq n_0} = (a_n)_{n=n_0}^{\infty}$ - ciąg, którego n-ty wyraz jest równy a_n.

Przykłady:

(i) $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$,

(ii) $(\frac{n+1}{2n+3})_{n\geq -1}$,

(iii) Niech a oraz r będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas ciąg (a_n) spełniający warunki $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + r$, $n = 1, 2, \ldots$ nazywamy ciągiem arytmetycznym. Łatwo dowieść indukcyjnie, że $a_n = a + (n-1)r$.

(iv) Niech a oraz q będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas ciąg (a_n) zadany przez $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$, $n = 1, 2, \ldots$ nazywamy ciągiem geometrycznym. Łatwo dowieść indukcyjnie, że $a_n = aq^{n-1}$.

(v) Ciąg Fibonacciego to ciąg $(F_n)_{n\geq 0}$ zadany następująco: $F_0 = F_1 = 1$ oraz

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Wyznaczymy wzór na F_n. Najpierw szukamy ciągów geometrycznych $(q^n)_{n\geq 0}$, $q \neq 0$, spełniających warunek (3). Dostajemy równość $q^{n+1} = q^n + q^{n-1}$, czyli $q^2 - q - 1 = 0$. Rozwiązaniem tego równania kwadratowego są liczby

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

zatem otrzymujemy dwa ciągi $(q_1^n)_{n\geq 0}$ oraz $(q_2^n)_{n\geq 0}$ spełniające (3). Wzór na F_n jest postaci $F_n = Aq_1^n + Bq_2^n$, gdzie A, B wyznaczamy korzystając z warunków początkowych.

$$\begin{cases} 1 = F_0 = A + B, \\ 1 = F_1 = Aq_1 + Bq_2 = A \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + B \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest

$$A = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{oraz} \quad B = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Zatem

$$F_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

4. Definicja granicy ciągu.

a) Liczba g jest granicą ciągu (a_n) (ciąg (a_n) jest zbieżny do g, ciąg (a_n) dąży do g), jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N o tej własności, iż jesli $n \geq N$, to $|a_n - g| < \varepsilon$.

$$\forall_{\varepsilon>0} \, \exists_N \, \forall_{n\geq N} \, |a_n - g| \leq \varepsilon.$$

Równoważnie, w dowolnym przedziale postaci $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, leżą *prawie wszystkie wyrazy ciągu* (a_n) - wszystkie z wyjątkiem skończenie wielu z nich.

Oznaczenie: $\lim_{n\to\infty} a_n = g$ bądź $a_n \to g$.

b) Liczba $+\infty$ (plus nieskończoność) jest granicą ciągu, jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej M istnieje liczba naturalna N o tej własności, iż jeśli $n \geq N$, to $a_n \geq M$.

$$\forall_M \, \exists_N \, \forall_{n\geq N} \, a_n \geq M.$$

Równoważnie, w dowolnym przedziale postaci (M, ∞), $M \in \mathbb{R}$, leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n).

Oznaczenie: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bądź $a_n \to +\infty$. Mówimy, że (a_n) jest zbieżny do $+\infty$.

c) Liczba $-\infty$ (minus nieskończoność) jest granicą ciągu, jeśli dla dowolnej liczby rzeczywistej M istnieje liczba naturalna N o tej własności, iż jeśli $n \geq N$, to $a_n \leq M$.

$$\forall_M \, \exists_N \, \forall_{n\geq N} \, a_n \leq M.$$

Równoważnie, w dowolnym przedziale postaci $(-\infty, M)$, $M \in \mathbb{R}$, leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (a_n).

Oznaczenie: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ bądź $a_n \to -\infty$. Mówimy, że (a_n) jest zbieżny do $-\infty$.

Uwaga: Granice $+\infty$, $-\infty$ czasami nazywane są granicami niewłaściwymi.

Uwaga: Zamiast ,,istnieje liczba N o tej własności, iż jeśli $n \geq N$, to ...'' będziemy czasem mówić ,,dla dostatecznie dużych n''.

Intuicja: Jeśli ciąg (a_n) zbiega do granicy skończonej g, to jego wyrazy, wraz ze wzrostem n, zbliżają się do g na dowolnie małą odległość. Nie oznacza to jednak, iż im większe n, tym a_n leży bliżej do g.

Uwaga: Zmiana skończonej liczby wyrazów ciągu nie ma wpływu na istnienie lub wartość granicy.

Przykłady:

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Istotnie, ustalmy $\varepsilon > 0$. Nierówność

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

zachodzi dla $n > \frac{1}{\varepsilon}$ (czyli dla dostatecznie dużych n); tak więc w definicji granicy wystarczy wziąć np. $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Można wziąć także większe N, np. $N = \left[\frac{10}{e}\right] + 100$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Istotnie, ustalmy $\varepsilon > 0$. Nierówność

$$\left|\frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

zachodzi, o ile $n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)$ (czyli dla dostatecznie dużych n); w definicji granicy wystarczy wziąć np. $N = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)\right] + 23$.

(iii) Ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r > 0$ jest zbieżny do $+\infty$. Aby to zobaczyć, ustalmy liczbę M. Nierówność

$$a_n = a_1 + (n-1)r > M$$

zachodzi, o ile $n > (M - a_1)/r + 1$ (czyli dla dostatecznie dużych n). Tak więc w definicji granicy wystarczy wziąć $N = \left[\frac{M-a_1}{r}\right] + 2$.

Analogicznie dowodzimy, że jeśli $r < 0$, to ciąg (a_n) jest zbieżny do $-\infty$. Natomiast jeśli $r = 0$, to ciąg jest stały, a zatem zbieżny do a_1 (w definicji granicy dla każdego ε bierzemy np.

$N = 1$).

5. Definicja podciągu

Niech $(a_n)_{n \geq n_0}$ będzie ciągiem i $n_0 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, $n_k \in \mathbb{N}$. Wówczas (a_{n_k}) nazywamy podciągiem ciągu (a_n).

Bezpośrednio z definicji wynika, iż

Twierdzenie 1.1. *Jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy g (skończonej lub nie), to każdy jego podciąg jest zbieżny do g.*

Wniosek 1. *Jeśli ciąg (a_n) posiada dwa podciągi zbieżne do różnych granic, to jest rozbieżny.*

Przykłady - ciąg dalszy:

(iv) Ciąg $((-1)^n)$ nie ma granicy. Podciąg o indeksach parzystych to ciąg stały (1), a więc zbieżny do 1. Podciąg o indeksach nieparzystych to ciąg stały (-1), a więc zbieżny do -1. Na mocy wniosku, rozważany ciąg jest rozbieżny.

(v) Niech $(a_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem geometrycznym o ilorazie q i $a_1 > 0$. Jeśli $q > 1$, to ciąg (a_n) jest zbieżny do $+\infty$. Istotnie, dla ustalonej liczby M, nierówność

$$a_n = a_1 q^{n-1} > M$$

jest spełniona dla $n > \log_q(M/a_1) + 1$ (czyli dla dostatecznie dużych n); wystarczy wziąć np. $N = [\log_q(M/a_1)] + 2$.

Jeśli $q < -1$, to ciąg (a_n) nie ma granicy. Istotnie, podciąg o indeksach parzystych $(|q|^{2n})$ jest rozbieżny do $+\infty$, jak pokazaliśmy przed chwilą. Natomiast podciąg o indeksach nieparzystych $(-|q|^{2n+1})$ zbiega do $-\infty$. Dowód jest analogiczny.

Jeśli $q = 1$, to ciąg jest stały, a więc zbieżny do a_1. Jeśli $q = -1$, to ciąg jest rozbieżny (por. przykład (iv)).

Przypuśćmy teraz, że $0 < q < 1$. Wykażemy, że wówczas (a_n) jest zbieżny do 0. Mamy $q = \frac{1}{1+x}$ dla pewnej liczby $x > 0$ ($x = \frac{1}{q} - 1$). Na mocy nierówności Bernoulliego,

$$|a_n - 0| = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{(1+x)^{n-1}} \leq \frac{a_1}{1 + (n-1)x} < \varepsilon,$$

przy czym ostatnia nierówność ma miejsce dla dostatecznie dużych n.

Jeśli $-1 < q < 0$, to korzystamy z następującego faktu: *ciąg (a_n) jest zbieżny do* 0 *wtedy i tylko wtedy, gdy $(|a_n|)$ jest zbieżny do* 0. Tak więc w tym przypadku ciąg zbiega do 0.

Wreszcie, jeśli $q = 0$, to, począwszy od drugiego wyrazu, wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są równe 0 - zatem ciąg zbiega do 0.

6. Ograniczoność ciągu

Ciąg (a_n) jest

a) ograniczony z góry, jeśli istnieje liczba M taka, że dla wszystkich n zachodzi nierówność $a_n \leq M$.

b) ograniczony z dołu, jeśli istnieje liczba M taka, że dla wszystkich n zachodzi nierówność $a_n \geq M$.

c) ograniczony, jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.

d) nieograniczony, jeśli nie jest ograniczony.

Przykłady:

(i) Ciąg $(\sin n)_{n\geq 0}$ jest ograniczony: $-1 \leq \sin n \leq 1$ dla wszystkich n.

(ii) Ciąg $(n^2+1)_{n\geq 0}$ jest ograniczony z dołu (mamy $n^2 + 1 \geq 1$ dla wszystkich n), ale nie jest ograniczony z góry.

(iii) Ciąg $((-2)^n)_{n\geq 0}$ nie jest ograniczony ani z góry, ani z dołu.

(iv) Ciąg $(\big(1+\frac{1}{n}\big)^n)$ jest ograniczony: mamy oczywiście $1 \leq \big(1+\frac{1}{n}\big)^n$ dla każdego n. Z drugiej strony, korzystając z dwumianu Newtona,

$$\begin{aligned}\big(1+\frac{1}{n}\big)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \frac{1}{n^n}\\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.\end{aligned}$$

W przedostatniej nierówności skorzystaliśmy z tego, że dla $k \geq 1$ mamy

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

(v) Niech x będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wówczas ciąg $(\big(1+\frac{x}{n}\big)^n)$ jest ograniczony. Rozważymy dwa przypadki. Jeśli $x \leq 0$, to dla dostatecznie dużych n mamy $\frac{x}{n} \in (-1, 0]$ i

$$0 < 1 + \frac{x}{n} < 1, \qquad \text{czyli} \qquad 0 < \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n \leq 1,$$

a zatem ciąg jest ograniczony ,,dla dostatecznie dużych n". Stąd jednak prosto wynika ograniczoność całego ciągu.

Przypuśćmy teraz, że $x > 0$. Oczywiście mamy

$$1 \le 1 + \frac{x}{n}, \qquad \text{zatem} \qquad 1 \le \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Niech $k = [x] + 1 > x$. Mamy, z nierówności Bernoulliego,

$$1 + \frac{x}{n} \le 1 + \frac{k}{n} \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k,$$

a więc

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nk} \le 3^k = 3^{[x]+1},$$

co oznacza, że rozważany ciąg jest ograniczony.

7. Monotoniczność ciągu

Ciag (a_n) jest

a) rosnący, jeśli dla każdego n spełniona jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.

b) niemalejący, jeśli dla każdego n spełniona jest nierówność $a_{n+1} \ge a_n$.

c) malejący, jeśli dla każdego n spełniona jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.

d) nierosnący, jeśli dla każdego n spełniona jest nierówność $a_{n+1} \le a_n$.

Jeśli ciąg jest nierosnący bądź niemalejący, to mówimy, iż jest on monotoniczny. Jeśli ciąg jest rosnący bądź malejący, to mówimy, iż jest on ściśle monotoniczny.

Przykłady:

(i) Ciąg arytmetyczny o rórnicy $r > 0$ jest rosnący: $a_{n+1} = a_n + r > a_n$.

(ii) Ciąg $((-1)^n)_{n \ge 0}$ nie jest monotoniczny.

(iii) Niech $x \in \mathbb{R}$. Ciąg $(1 + \frac{x}{n})^n$ jest niemalejący dla $n > -x$. Mamy bowiem, na mocy nierówności Bernoulliego,

$$\frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \left[1 + \frac{-x}{(n+x)(n+1)}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+x}{n} \ge \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \cdot \frac{n+x}{n} = 1.$$

Twierdzenie 1.2. *Każdy ciąg niemalejący i ograniczony z góry przez M jest zbieżny do granicy skończonej niewiększej niż M. Każdy ciąg nierosnący i ograniczony z dołu przez M jest zbieżny do granicy skończonej niemniejszej niż M.*

Przykłady:

(i) Ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ zadany wzorem

$$a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

jest zbieżny. Istotnie, jest on rosnący, a ponadto

$$a_n \leq \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1} < 1$$

i wystarczy skorzystać z twierdzenia 1.2.

(ii) **Funkcja wykładnicza**. Niech $x \in \mathbb{R}$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Wówczas, jak już wykazaliśmy, ciąg $(1+\frac{x}{n})^n$ jest rosnący (od pewnego miejsca) i ograniczony. Ponieważ zamiana skończenie wielu wyrazów nie ma wpływu na istnienie bądź wartość granicy, twierdzenie 1.2 daje nam, iż istnieje granica

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

W szczególności, dla $x = 1$, oznaczmy

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Można udowodnić, że

$$\exp(x) = e^x \qquad \text{dla} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Jest jasne, co oznacza e^x dla $x \in \mathbb{Q}$. Dla x niewymiernych określamy

$$\exp(x) = \sup\{e^w : w < x,\ w \in \mathbb{Q}\}.$$

8. Symbole nieoznaczone. Wprowadziliśmy wcześniej symbole $-\infty$ i $+\infty$. Zdefiniujmy działania z ich użyciem.

Definicja.

- $-(+\infty) = -\infty, \quad +(+\infty) = +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad +(-\infty) = -\infty,$
- $+\infty \pm a = \pm a + (+\infty) = +\infty,\ -\infty \pm a = \pm a + (-\infty) = -\infty$ dla każdej liczby a,
- $+\infty + (+\infty) = +\infty,\ -\infty + (-\infty) = -\infty,\ +\infty - (-\infty) = +\infty,\ -\infty - (+\infty) = -\infty,$
- jeśli $a > 0$, to $+\infty \cdot a = +\infty$ i $-\infty \cdot a = -\infty,\ +\infty \cdot +\infty = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty,$
- jeśli $a < 0$, to $+\infty \cdot a = -\infty$ i $-\infty \cdot a = +\infty,$
- $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$ dla każdej liczby a oraz $\dfrac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \cdot \dfrac{1}{a}$ dla każdej liczby $a \neq 0$,
- jeśli $a > 1$, to $a^{+\infty} = +\infty, \quad a^{-\infty} = 0,$
- jeśli $0 < a < 1$, to $a^{+\infty} = 0, \quad a^{-\infty} = +\infty.$

Niektóre działania na pewnych symbolach nie zostały zdefiniowane, np. $\frac{\pm\infty}{+\infty}$ bądź $+\infty + (-\infty)$. Są to tzw. symbole nieoznaczone. Otóż nie można sensownie zdefiniować wyników tych działań - wkrótce zobaczymy dlaczego.

9. Obliczanie granic i zbieżność ciągu - podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 1.3 (o jednoznaczności granicy)**.** *Każdy ciąg posiada co najwyżej jedną granicę.*

Dowód: Przypuśćmy, wbrew tezie, że pewien ciąg (a_n) posiada dwie granice g_1, g_2. Na początek załóżmy, że te granice są skończone i niech $\varepsilon = \frac{1}{3}|g_1 - g_2| > 0$. Z definicji granicy, istnieje N takie, że jeśli $n \geq N$, to

$$|a_n - g_1| < \varepsilon \qquad \text{oraz} \qquad |a_n - g_2| < \varepsilon.$$

Stąd, na mocy nierówności trójkąta

$$|g_1 - g_2| = |g_1 - a_n + a_n - g_2| \leq |g_1 - a_n| + |a_n - g_2| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|g_1 - g_2|,$$

sprzeczność. W przypadku gdy np. $g_1 = +\infty$ i granica g_2 jest skończona, niech $\varepsilon = 1$ i $M = g_2 + 2$. Z definicji, istnieje N takie, że jeśli $n \geq N$, to

$$a_n \geq M = g_2 + 2 \qquad \text{oraz} \qquad |a_n - g_2| < \varepsilon = 1.$$

Zatem

$$a_n = a_n - g_2 + g_2 \leq |a_n - g_2| + g_2 \leq 1 + g_2 < 2 + g_2 \leq a_n,$$

sprzeczność. W pozostałych przypadkach postępujemy analogicznie, dochodząc do sprzeczności. Dowód jest zakończony. □

Twierdzenie 1.4 (o arytmetycznych własnościach granicy)**.**

a) *Jeśli istnieją granice* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *oraz określona jest ich suma (w powyższym sensie), to istnieje granica* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ *i jest ona równa* $\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$.

b) *Jeśli istnieją granice* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *oraz określona jest ich różnica (w powyższym sensie), to istnieje granica* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n)$ *i jest ona równa* $\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$.

c) *Jeśli istnieją granice* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n$ *oraz określony jest ich iloczyn (w powyższym sensie), to istnieje granica* $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ *i jest ona równa* $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.

d) Jeśli istnieją granice $\lim_{n\to\infty} a_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n$ oraz określony jest ich iloraz (w powyższym sensie), to istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ i jest ona równa $\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

Dowód: a) Przypuśćmy, że granice $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ są skończone. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje liczba N taka, że jeśli $n \geq N$, to

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{oraz} \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem, z nierówności trójkąta,

$$|a_n + b_n - a - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon,$$

czyli $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Załóżmy, że np. a jest liczbą skończoną, a $b = +\infty$. Ustalmy $\varepsilon = 1$ oraz M. Istnieje liczba N taka, że jeśli $n \geq N$, to

$$|a_n - a| < 1 \qquad \text{oraz} \qquad b_n > M - a + 1.$$

Zatem

$$a_n + b_n = a_n - a + b_n + a \geq -|a_n - a| + b_n + a > -1 + M - a + 1 + a = M.$$

W pozostałych przypadkach postępujemy analogicznie.

b) Stosujemy poprzedni podpunkt do ciągów (a_n), $(-b_n)$; korzystamy tu z faktu, który wynika natychmiast z definicji: jeśli $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to $\lim_{n\to\infty}(-b_n) = -b$.

c), d) postępujemy analogicznie. □

Twierdzenie 1.5. *Jeśli $a_n \geq b_n$ dla dostatecznie dużych n i $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to $a \geq b$.*

Twierdzenie 1.6 (o trzech ciągach)**.** *Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla dostatecznie dużych n i ciągi (a_n) oraz (c_n) są zbieżne do tej samej granicy, to ciąg (b_n) też jest zbieżny i zachodzi równość*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Przykład:

(i) Jeśli ciąg (a_n) spełnia warunek $\lim_{n\to\infty} na_n \to 0$, to $\lim_{n\to\infty}(1 + a_n)^n = 1$.

Dowód: Mamy, na mocy nierówności Bernoulliego, dla dostatecznie dużych n,

$$1 + n \cdot a_n \leq (1 + a_n)^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{a_n}{1+a_n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 - \frac{na_n}{1+a_n}}.$$

Widać, że lewa oraz prawa strona powyższej nierówności zbiega do 1. Wobec tego teza wynika natychmiast z twierdzenia o trzech ciągach. $\square$

Twierdzenie 1.7 (reguła Stolza)**.** *Przypuśćmy, iż ciąg (b_n) jest ciągiem monotonicznym o wyrazach różnych od* 0*. Niech (a_n) będzie ciągiem takim, że istnieje granica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Jeśli jest spełniony jeden z warunków:
(i) Ciąg (b_n) ma granicę nieskończoną,
(ii) ciągi (a_n), (b_n) są zbieżne do 0*,*
to ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny i mamy równość

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Przykład:
(i) Jeżeli ciąg (c_n) jest zbieżny do g, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} = g.$$

Istotnie, wynika to z reguły Stolza: weźmy $a_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ oraz $b_n = n$. Ciąg (b_n) jest rosnący i zbieżny do $+\infty$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} c_{n+1} = g.$$

2 Szeregi

1. Definicja szeregu. Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Szeregiem o wyrazach a_0, a_1, a_2, ... nazywamy ciąg $(s_n)_{n\geq 0}$, którego kolejnymi wyrazami są kolejne sumy początkowych wyrazów ciągu (a_n), tzn.

$$s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \quad \ldots.$$

Wyrazy s_0, s_1, s_2, ... będziemy nazywać sumami częściowymi szeregu o wyrazach a_0, a_1, a_2, ...

Oznaczenie:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \qquad \text{lub} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Podobnie jak w przypadku ciągów, numeracja wyrazów szeregu może się rozpoczynać od dowolnej liczby całkowitej k; szereg oznaczamy wówczas

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \dots \qquad \text{lub} \qquad \sum_{n=k}^{\infty} a_n.$$

2. Definicja szeregu zbieżnego/rozbieżnego. Jeśli ciąg sum częściowych szeregu ma granicę skończoną, to mówimy, że szereg jest zbieżny i tę granicę nazywamy sumą szeregu. Jeśli ciąg sum częściowych ma granicę nieskończoną bądź nie jest zbieżny, to mówimy, że szereg jest rozbieżny. Sumę szeregu oznaczamy tak samo jak szereg, tzn.

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots \qquad \text{lub} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Zasadniczym problemem przy badaniu szeregów jest rozstrzygnięcie, czy są one zbieżne, czy nie. Większość twierdzeń, które pojawią się poniżej, będzie odnosiła się do tego pytania.

Rozpocznijmy od sformułowania kilku prostych faktów. Pierwsze twierdzenie wynika natychmiast z własności ciągów.

Twierdzenie 2.1. *Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a c jest liczbą rzeczywistą, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n$ też jest zbieżny i mamy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Drugi fakt dotyczy dodawania szeregów, ,,wyraz po wyrazie". Ponownie, dowód jest natychmiastowy.

Twierdzenie 2.2. *Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ będą szeregami zbieżnymi. Wówczas zbieżny jest także szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ i mamy*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Kolejny fakt dotyczy porównywania sum szeregów i ponownie jego dowód jest oczywisty.

Twierdzenie 2.3. *Niech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *będą szeregami zbieżnymi. Przypuśćmy, że dla każdego* n *mamy* $a_n \leq b_n$. *Wówczas*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

Dodatkowo, jeśli dla pewnej liczby n *mamy nierówność ostrą* $a_n < b_n$, *to także*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

3. Warunek konieczny zbieżności szeregu

Twierdzenie 2.4. *Jeśli szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód: Zachodzi równość $a_n = s_n - s_{n-1}$ i ciąg (s_n) jest zbieżny (gdyż szereg jest zbieżny). Zatem, na mocy twierdzenia o arytmetycznych własnościach granicy,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0,$$

co kończy dowód. $\square$

Okazuje się, iż powyższego twierdzenia nie można odwrócić. Rozważmy następujący ważny przykład.

Przykład: szereg harmoniczny

Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Jak widać, wyrazy tego szeregu dążą do zera. Tym niemniej, jak za chwilę udowodnimy, szereg ten jest rozbieżny. Mamy bowiem

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1,\\
s_2 &= 1 + \frac{1}{2},\\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2},\\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

i ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n,

$$s_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

To dowodzi, iż podciąg (s_{2^n}) ciągu (s_n) zbiega do nieskończoności. Wystarczy już tylko zauważyć, że ciąg (s_n) jest rosnący, a więc, posiadając podciąg zbieżny do $+\infty$, także musi zbiegać do $+\infty$.

Rozważmy jeszcze dwa waże przykłady.

Przykład.

Zbadajmy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ponieważ wyrazy szeregu są dodatnie, więc ciąg (s_n) sum częściowych jest rosnący. Ponadto, mamy

$$\begin{aligned} s_n =& 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n \cdot n} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} \\ & 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Otwieramy nawiasy i widzimy, że większość wyrazów się skraca; zaatem dostajemy oszacowanie

$$s_n \leq 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Ciąg (s_n) jest więc rosnący i ograniczony z góry. Zatem jest zbieżny, czyli rozważany przez nas szereg jest zbieżny.

Całkiem inną kwestią jest wyznaczenie sumy powyższego szeregu. Można udowodnić, że wynosi ona $\frac{\pi^2}{6}$, ale dowód tego faktu jest znacznie trudniejszy. Rozstrzygnięcie tego, czy szereg jest zbieżny czy nie, oraz wyznaczenie sumy szeregu to dwa odrębne problemy.

Przykład: szereg geometryczny.

Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, gdzie q jest ustaloną liczbą rzeczywistą. Jeśli $|q| < 1$, to mamy

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \to \frac{1}{1-q} \quad \text{gdy} \quad n \to \infty,$$

a zatem szereg jest zbieżny i mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Jeśli zaś $|q| \geq 1$, to wyrazy szeregu nie zbiegają do 0 - a zatem na mocy powyższego twierdzenia szereg jest rozbieżny.

4. Szeregi o wyrazach dodatnich

W sytuacji, gdy szereg ma wyrazy dodatnie, jego ciąg sum częściowych jest rosnący, a zatem posiada granicę. Wobec tego rozstrzygnięcie, czy szereg jest zbieżny, czy nie, sprowadza się do pytania o skończoność tej granicy. Oczywiście, powyższa uwaga stosuje się także w przypadku, gdy szereg ma *prawie wszystkie* wyrazy dodatnie - tzn. skończoną liczbę wyrazów ujemnych. Wszystkie poniższe twierdzenia pozostają w mocy w tym ogólniejszym przypadku.

Sformułujemy teraz kilka pomocnych faktów, które pozwalają odpowiadać na to pytanie.

Twierdzenie 2.5 (Kryterium porównawcze)**.** *Niech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *będą szeregami o wyrazach dodatnich. Przypuśćmy, że dla dostatecznie dużych* n *zachodzi nierówność* $a_n \leq b_n$. *Wówczas*

(i) Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *też jest zbieżny.*
(ii) Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *też jest rozbieżny.*

Prosty dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 2.6 (Asymptotyczne kryterium porównawcze)**.** *Niech* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *będą szeregami o wyrazach dodatnich takich, że istnieje skończona i dodatnia granica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Wówczas szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny.*

Dowód: Niech $g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Mamy $0 < g < \infty$, a zatem istnieją liczby c, d spełniające nieżówność $0 < c < g < d < \infty$. Z definicji granicy, dla dostatecznie dużych n mamy

$$c < \frac{a_n}{b_n} < d, \qquad \text{czyli} \qquad c \cdot b_n < a_n < d \cdot b_n.$$

Teraz wystarczy skorzystać z kryterium porównawczego: jeśli szereg o wyrazach a_n jest zbieżny, to szereg o wyrazach $c \cdot b_n$ także, a zatem, na mocy Twierdzenia 2.1, szereg o wyrazach b_n jest zbieżny. W drugą stronę rozumujemy analogicznie. □

Trzecie kryterium zbieżności szeregów pochodzi z uogólnienia rozumowania zastosowanego wyżej dla szeregu harmonicznego.

Twierdzenie 2.7 (Twierdzenie o zagęszczaniu)**.** *Przypuśćmy, że ciąg* (a_n) *jest niemalejący i jego wyrazy są dodatnie. Wówczas szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ *jest zbieżny.*

Przykłady:

Dwa pierwsze przykłady dotyczą kryterium o zagęszczaniu.

(i) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.

Aby to udowodnić, zauważmy najpierw, iż gdy $p \leq 0$, to wyrazy szeregu nie zbiegają do 0, a więc jest on rozbieżny. Tak więc wystarczy zająć się przypadkiem $p > 0$. Wówczas wyrazy szeregu maleją (i oczywiście są dodatnie), a więc możemy stosować kryterium zagęszczające: zbieżność rozważanego szeregu jest równoważna zbieżności szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-p})^n.$$

Jest to szereg geometryczny o ilorazie 2^{1-p} i wiemy, iż jest on zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|2^{1-p}| < 1$, czyli gdy $p > 1$.

(ii) Szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$, $p \in \mathbb{R}$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.

Gdy $p \leq 0$, to mamy, dla $n \geq 3$,

$$\frac{1}{n \ln^p n} \geq \frac{1}{n}$$

i rozbieżność szeregu wynika z kryterium porównawczego oraz rozbieżności szeregu harmonicznego. Przypuśćmy więc, że $p > 0$. Wyrazy rozważanego szeregu są wówczas malejące (i dodatnie), a zatem, na mocy twierdzenia o zagęszczaniu, szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln^p 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^p 2}.$$

Na mocy poprzedniego przykładu, zbieżność powyższego szeregu ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $p > 1$.

(iii) Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6 - 200n^5 + 34}{n^7 + 199n + 12}.$$

Intuicyjnie, widzimy, że dla dużych n wyrazy powyższego szeregu są bliskie $\frac{n^6}{n^7} = \frac{1}{n}$, czyli wyrazom szeregu harmonicznego. To sugeruje, że rozważany szereg jest rozbieżny. Ściślej, oznaczmy wyrazy naszego szeregu przez $a_1, a_2, \ldots$ i niech $b_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6 - 200n^5 + 34}{n^7 + 199n + 12} \cdot n = 1.$$

Na mocy asymptotycznego kryterium porównawczego i rozbieżności szeregu o wyrazach (b_n), rozważany szereg jest rozbieżny.

(iv) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ jest zbieżny.

Udowodnimy najpierw następujący użyteczny fakt.

Lemat 2.1. *Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną i $q \in (1, \infty)$. Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0.$$

Dowód: Oznaczmy $a_n = \frac{n^k}{q^n}$. Mamy

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{q} < a_n \tag{4}$$

dla dostatecznie dużych n. Oznacza to, iż ciąg (a_n) jest od pewnego miejsca malejący. Ponadto, oczywiście, jest on ograniczony z dołu przez 0; stąd wynika jego zbieżność do pewnej liczby g. Zbiegając z $n \to \infty$ w równości (4), dostajemy $g = g \cdot \frac{1}{q}$, skąd $g = 0$. □

Możemy teraz przejść do badania zbieżności rozważanego szeregu. Porównujemy go (czyli stosujemy kryterium porównawcze) ze zbieżnym geometrycznym szeregiem o wyrazach $(\frac{1}{2^n})$: mamy, dla dostatecznie dużych n,

$$\frac{n^3}{3^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Istotnie, wynika to z lematu powyżej. Wobec tego rozważany szereg jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta i Cauchy'ego

Przedstawimy teraz ostatnie dwa kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich.

Twierdzenie 2.8 (Kryterium ilorazowe d'Alemberta)**.** *Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich takich, że istnieje granica*

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Wówczas

(i) jeśli $q < 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,

(ii) jeśli $q > 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

W przypadku gdy $q = 1$, nic nie można powiedzieć; np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny.

Twierdzenie 2.9 (Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego). *Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem o wyrazach dodatnich takich, że istnieje granica*

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Wówczas
(i) jeśli $q < 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
(ii) jeśli $q > 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Podobnie jak poprzednio, jeśli granica q jest równa 1, to nic nie można powiedzieć o zbieżności szeregu.

5. Szeregi o wyrazach dowolnych

Rozpocznijmy od kryterium Leibnitza badania szeregów naprzemiennych, tzn. takich, ze każde dwa kolejne wyrazy mają przeciwny znak.

Twierdzenie 2.10 (Kryterium Leibnitza). *Załóżmy, że ciąg (a_n) ma prawie wszystkie wyrazy dodatnie, dąży do 0 i jest malejący od pewnego miejsca. Wówczas szereg*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

jest zbieżny.

Przykład:
Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny.

Definicja szeregów bezwzględnie zbieżnych oraz warunkowo zbieżnych
Mówimy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest
(i) *bezwzględnie zbieżny*, jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.
(ii) *warunkowo zbieżny*, jeśli jest on zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny.

Przykłady:
(i) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny.
(ii) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+5}}{n}$ jest zbieżny warunkowo.

Twierdzenie 2.11. *Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Przykłady zobaczymy w następnej części wykładu, poświęconej szeregom potęgowym.

6. Szeregi potęgowe

Definicja
Szeregiem potęgowym o środku w x_0 oraz współczynnikach a_0, a_1, a_2, ... nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Ważny przykład - rozwinięcie funkcji e^x w szereg potęgowy
Rozważmy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Wykażemy, że jest on bezwzględnie zbieżny dla każdego x. Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

ma wyrazy dodatnie, a więc możemy stosować kryterium d'Alemberta; mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0,$$

skąd wynika bezwzględna zbieżność rozważanego szeregu.

Powstaje naturalne pytanie, ile wynosi suma takiego szeregu. Okazuje się, iż odpowiedź brzmi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{5}$$

Przypuśćmy najpierw, że $x \geq 0$. Jak wiemy,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Ustalmy liczbę k i niech n będzie liczbą niemniejszą niż k. Korzystając z dwumianu Newtona, mamy

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j \geq \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j$$

$$= 1 + \frac{n}{n} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \ldots \frac{n-k+1}{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\to 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \qquad \text{gdy} \qquad n \to \infty.$$

Wynika stąd, że dla dowolnej liczby k mamy

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!}.$$

Z drugiej strony, przyjmując $n = k$ w powyższym przekształceniu, dostajemy

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k \leq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} \leq e^x.$$

Wobec tego z twierdzenia o trzech ciągach wynika tożsamość (5).

W przypadku $x < 0$ szacowania są nieco bardziej złożone i je pomijamy.

Inne przykłady szeregów potęgowych

(i) Zbadajmy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{6}$$

Zacznijmy od zbieżności bezwzględnej: rozważmy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n}. \tag{7}$$

Jeśli $|x| > 1$, to na mocy Lematu 2.1, wyrazy szeregu nie zbiegają do 0 a więc (7) jest rozbieżny. Jeśli $|x| = 1$, to otrzymujemy rozbieżny szereg harmoniczny. Jeśli zaś $|x| < 1$, to stosujemy kryterium d'Alemberta: mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)}{|x|^n/n} = |x|,$$

a więc szereg (7) jest zbieżny, czyli (6) jest bezwzględnie zbieżny.

Tak więc szereg (6) jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|x| < 1$.

Zajmijmy się teraz zbieżnością szeregu (6). Jeśli $|x| > 1$, to wyrazy nie dążą do 0, czyli zbieżność szeregu nie ma miejsca. Dla $|x| < 1$ szereg jest zbieżny bezwględnie, a więc także w zwykłym sensie. Pozostaje już tylko zbadać zbieżność w przypadku $|x| = 1$. Dla $x = 1$ dostajemy rozbieżny szereg harmoniczny, a dla $x = -1$ otrzymujemy szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

zbieżny na mocy kryterium Leibnitza.

(ii) W ten sam sposób dowodzimy, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

jest zbieżny bezwzględnie oraz zbieżny w zwykłym sensie dla tych samych x: $|x| < 1$.

(iii) Wykażemy, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$

jest zbieżny tylko dla $x = 0$. Otóż dla $x \neq 0$ wyrazy szeregu nie zbiegają do 0: istotnie, mamy $|a_{n+1}| = |a_n| \cdot (n + 1)|x|$, a zatem, począwszy od pewnego miejsca, ciąg $(|a_n|)$ jest rosnący, a więc nie zbiega do 0 (a więc (a_n) także nie zbiega do 0).

Powstaje naturalne pytanie: mając dany szereg potęgowy (np. o środku w 0), jak wygląda zbiór S złożony z tych x, dla których jest on zbieżny? W przypadku funkcji wykładniczej szereg był zbieżny dla wszystkich x, czyli $S = \mathbb{R}$; w przykładach (i) i (ii) zbiorem S był przedział (otwarty w (i) i lewostronnie domknięty w (ii)), wreszcie w ostatnim przykładzie S zawierał tylko jeden punkt. Ogólnie, mamy następujący fakt.

Twierdzenie 2.12. *Zbiór punktów, w których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny, jest przedziałem o środku w 0 (być może zdegenerowanym do jednego punktu bądź nieskończonym). Wewnątrz przedziału zbieżności szereg jest zbieżny bezwzględnie.*

Definicja

Zbiór punktów zbieżności szeregu potęgowego nazywamy przedziałem zbieżności. Połowę długości tego przedziału nazywamy promieniem zbieżności tego szeregu.

3 Funkcje ciągłe

1. Punkt skupienia zbioru

Oznaczenie: Niech $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych powiększony o symbole $+\infty$, $-\infty$.

Definicja: Niech A będzie dowolnym podzbiorem $\mathbb{R}$. Punkt $a \in A$ jest punktem skupienia zbioru A, jeśli istnieje ciąg (a_n) o wyrazach należących do A i różnych od a, który jest zbieżny do A.

Przykład: Liczba 0 jest punktem skupienia zbioru $I = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. Każda inna liczba z tego zbioru nie jest już punktem skupienia tego zbioru.

2. Granica funkcji w punkcie Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i a będzie dowolnym punktem skupienia zbioru D. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie a, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) o wyrazach w $D \setminus \{x_0\}$, zbieżnego do a, ma miejsce równość $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Granicę funkcji f w punkcie a oznaczamy $\lim_{x\to a} f(x)$.

Uwaga: Możemy dowolnie zmieniać wartość funkcji f w punkcie a i nie ma to wpływu na istnienie bądź wartość granicy w punkcie a.

Przykłady:
(i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
(iv) $\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.
(v) Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie ma granicy w zerze. Aby się o tym przekonać, weźmy ciąg $(x_n) = (\frac{1}{n})$ zbieżny do zera; mamy $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = +\infty$. Z drugiej strony, biorąc ciąg $(-\frac{1}{n})$ (też zbieżny do 0) mamy $\lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{n}) = -\infty$. Tak więc wskazaliśmy dwa ciągi argumentów zbieżne do zera, dla których granice wartości funkcji są różne. Tak więc f nie posiada granicy w zerze.
(vi) Funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nie ma granicy w 0. Podobnie jak wyżej, wskazujemy dwa ciągi argumentów, zbieżne do 0, dla których granice wartości f są różne. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = 1.$$

Oprócz granicy funkcji rozpatruje się także granice jednostronne (lewo- i prawostronne) funkcji w punkcie. Zdefiniujemy tylko granicę lewostronną (granicę prawostronną określa się w sposób analogiczny).

Definicja granicy lewostronnej Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją i $a \in D$ będzie punktem o tej własności, że istnieje ciąg (x_n) o wyrazach w D, mniejszych od a, zbieżny do a. Mówimy, że $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą lewostronna funkcji f w punkcie a, jeśli dla dowolnego takiego ciągu (x_n) ma miejsce równość $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Granicę funkcji f w punkcie x_0 oznaczamy $\lim_{x\to a^-} f(x)$ bądź $f(a^-)$.

Przykłady:
(i) Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ ma granice jednostronne w punkcie 0: mianowicie, mamy

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \text{oraz} \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

(ii) Funkcja $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nie ma granicy prawostronnej w zerze. Wykazaliśmy to w przykładzie (vi) powyżej, wskazując dwa *dodatnie* ciągi argumentów, dla których granice wartości były różne. Analogicznie można udowodnić, że funkcja f nie posiada granicy lewostronnej w zerze.

3. Dwa proste twierdzenia
Analogicznie jak w przypadku ciągów, mamy następujące fakty.

Twierdzenie 3.1. *Niech f, g będą funkcjami takimi, że istnieją granice* $\lim_{x\to p} f(x)$, $\lim_{x\to p} g(x)$.
a) Jeśli suma tych granic jest określona, to mamy

$$\lim_{x\to p}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) + \lim_{x\to p} g(x).$$

b) Jeśli różnica tych granic jest określona, to mamy

$$\lim_{x\to p}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) - \lim_{x\to p} g(x).$$

c) Jeśli iloczyn tych granic jest określony, to mamy

$$\lim_{x\to p}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x).$$

d) Jeśli $g \neq 0$ iloraz tych granic jest określony, to mamy

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to p} f(x)}{\lim_{x\to p} g(x)}.$$

Definicja: Mówimy, że x jest dostatecznie bliski p, jeśli

(i): $p \in \mathbb{R}$ $|x - p| < \delta$ dla pewnej liczby $\delta > 0$,

(ii): $p = +\infty$ $x \geq M$ dla pewnej liczby M.

(iii): $p = -\infty$ $x \leq M$ dla pewnej liczby M.

Twierdzenie 3.2 (O szacowaniu)**.** *(i) Jeśli $C < \lim_{x\to p} f(x)$, to dla x dostatecznie bliskich p, $C < f(x)$.*

(ii) Jeśli $C > \lim_{x\to p} f(x)$, to dla x dostatecznie bliskich p, $C > f(x)$.

(iii) Jeśli $\lim_{x\to p} g(x) < \lim_{x\to p} f(x)$, to dla x dostatecznie bliskich p, $g(x) < f(x)$.

(iv) Jeśli $g(x) < f(x)$ dla x dostatecznie bliskich p oraz istnieją granice $\lim_{x\to p} f(x)$, $\lim_{x\to p} g(x)$, to

$$\lim_{x\to p} g(x) \leq \lim_{x\to p} g(x).$$

4. Alternatywna definicja granicy

Niech g, $p \in \mathbb{R}$. Mówimy, że g jest granicą funkcji w punkcie p, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje δ o tej własności, że jeśli $|x - p| < \delta$, to $|f(x) - g| < \varepsilon$.

Innymi słowy, dla dowolnego ε mamy, iż $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla x dostatecznie bliskich p.

To ostatnie zdanie może służyć jako alternatywna definicja granicy także w przypadku nieskończonych wartości g lub p.

5. Twierdzenia o granicy funkcji - ciąg dalszy

Twierdzenie 3.3 (O trzech funkcjach)**.** *Jeśli dla x dostatecznie bliskich p zachodzi nierówność*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

oraz istnieją granice $\lim_{x\to p} f(x)$, $\lim_{x\to p} h(x)$ i są one równe G, to istnieje także granica $\lim_{x\to p} g(x)$ i jest ona równa G.

Twierdzenie 3.4 (O granicy złożenia)**.** *Załóżmy, że zbiór wartości funkcji g jest zawarty w dziedzinie funkcji f. Przypuśćmy, że istnieje granica $G = \lim_{x\to p} g(x)$ oraz G jest punktem skupienia dziedziny f i F ma granicę H w punkcie G. Ponadto, przypuśćmy, że wartości funkcji g w punktach dostatecznie bliskich p są różne od G. Wówczas istnieje granica $\lim_{x\to p} f(g(x))$ i jest ona równa H.*

6. Kresy zbioru i funkcji

(i) Liczba $M \in \overline{\mathbb{R}}$ jest kresem górnym niepustego zbioru A, jeśli dla każdego $a \in A$ mamy $a \leq M$ oraz dla dowolnego $M' < M$ istnieje $a \in A$ takie, że $a > M'$. Innymi słowy, M jest najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru A. Oznaczenie: $\sup A$.

(ii) Kresem górnym funkcji f nazywamy kres górny zbioru jej wartości. Oznaczenie: $\sup f$.

(iii) Liczba $M \in \overline{\mathbb{R}}$ jest kresem dolnym niepustego zbioru A, jeśli dla każdego $a \in A$ mamy $a \geq M$ oraz dla dowolnego $M' > M$ istnieje $a \in A$ takie, że $a < M'$. Innymi słowy, M jest największym ograniczeniem górnym zbioru A. Oznaczenie: $\inf A$.

(iv) Kresem dolnym funkcji f nazywamy kres dolny zbioru jej wartości. Oznaczenie: $\inf f$.

Przykłady:
(i) $\inf(a, b) = a$, $\sup(a, b) = b$, gdize $a < b$, a, $b \in \overline{\mathbb{R}}$.
(ii) $\inf[a, b] = a$, $\sup[a, b] = b$, gdize $a < b$, a, $b \in \mathbb{R}$.
(iii) $\inf\{1, 2, \ldots\} = 1$, $\sup\{1, 2, \ldots\} = +\infty$.
(iv) Niech $f(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \geq 0$. Jak łatwo widać, $f < 1$, więc 1 jest ograniczeniem górnym zbioru wartości f. Jeśli zaś $M' < 1$, to biorąc dostatecznie duże a mamy $f(a) > M'$. Zatem $\sup f = 1$.

Z drugiej strony, oczywiście $f \geq 0$ oraz $f(0) = 0$. Zatem $\inf f = 0$.
(v) Kresem górnym funkcji wykładniczej $f(x) = e^x$ jest $+\infty$, a dolnym - 0.
(vi) Kresem górnym funkcji $f(x) = x^2 + 2x$ jest $+\infty$, a kresem dolnym -1.

Twierdzenie 3.5. *Każdy zbiór niepusty i ograniczony z góry ma skończony kres górny. Każdy zbiór niepusty i ograniczony z dołu ma skończony kres dolny.*

7. Funkcje monotoniczne

Definicja.
(i) Mówimy, że f jest funkcją rosnącą, jeśli dla dowolnych dwóch punktów x, y, $x < y$, należących do jej dziedziny, mamy $f(x) < f(y)$.
(ii) Mówimy, że f jest funkcją niemalejącą, jeśli dla dowolnych dwóch punktów x, y, $x < y$, należących do jej dziedziny, mamy $f(x) \leq f(y)$.
(iii) Mówimy, że f jest funkcją malejącą, jeśli dla dowolnych dwóch punktów x, y, $x < y$, należących do jej dziedziny, mamy $f(x) > f(y)$.
(iv) Mówimy, że f jest funkcją nierosnącą, jeśli dla dowolnych dwóch punktów x, y, $x < y$, należących do jej dziedziny, mamy $f(x) \geq f(y)$.

Funkcje z punktu (i) bądź (iii) nazywamy ściśle monotonicznymi, a z (ii) i (iv) - monotonicznymi.

Twierdzenie 3.6. *Załóżmy, że p jest punktem skupienia dziedziny funkcji monotonicznej f i istnieje ciąg (x_n) zawarty w dziedzinie f o wyrazach mniejszych od p. Wówczas istnieje granica lewostronna $\lim_{x\to p^-} f(x)$. Mamy analogiczne stwierdzenie dla granic prawostronnych.*

8. Funkcje ciągłe

Definicja Niech p będzie argumentem funkcji f. Wówczas f jest ciągła w punkcie p, jeśli zachodzi jeden z warunków:
(i) p nie jest punktem skupienia dziedziny f.
(ii) p jest punktem supienia dziedziny f i $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Innymi słowy, f jest ciągła w punkcie p, jeśli dla każdego $e > 0$ mamy $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ dla x dostatecznie bliskich p.

Twierdzenie 3.7. *Niech f, g - funkcje ciągłe w punkcie p. Wówczas $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ oraz f/g (o ile $g \neq 0$) są funkcjami ciągłymi w punkcie p.*

Twierdzenie 3.8. *Niech g będzie funkcją ciągłą w punkcie p. Załóżmy, że zbiór wartości g jest zawarty w dziedzinie f i f jest ciągła w punkcie $g(p)$. Wówczas funkcja $f \circ g$ jest ciągła w punkcie p.*

Definicja Mówimy, że funkcja f jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Przykłady:
(i) Funkcja stała jest ciągła.
(ii) Funkcje $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ i ogólnie, $f(x) = x^k$, gdzie k jest całkowite dodatnie, są ciągłe.
(iii) Każdy wielomian jest funkcją ciągłą.
(iv) Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą (w każdym punkcie zbieżności szeregu).
(v) Funkcja $f(x) = e^x$ jest funkcją ciągła.
(vi) Funkcja $f(x) = \ln x$ jest funkcją ciągła.
(vii) Funkcja $f(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$), określona na $(0, +\infty)$, jest funkcją ciągłą: mamy bowiem $x^a = e^{a \ln x}$.
(viii) Funkcje sinus i kosinus są ciągłe.
Przykłady funkcji nieciągłych
(i) Niech

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x > 0, \\ 0 & \text{jeśli } x = 0, \\ -1 & \text{jeśli } x < 0 \end{cases}$$

jest funkcją nieciągłą w zerze. Nie istnieje granica f w zerze.
(ii) Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x \neq 1, \\ 0 & \text{jeśli } x = 1 \end{cases}$$

jest nieciągła w 1, pomimo iż istnieje granica f w punkcie 1.
Kilka twierdzeń

Twierdzenie 3.9 (O przyjmowaniu wartości pośrednich - własność Darboux)**.** *Niech f będzie funkcją ciągłą w punktach pewnego przedziału I i załóżmy, że dla pewnych x, $z \in I$ i pewnej liczby C mamy $f(x) < C < f(z)$. Wówczas istnieje $y \in I$ takie, że $f(y) = C$.*

Twierdzenie 3.10 (Weierstrass). *Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na pewnym odcinku $[a, b]$. Wówczas f przyjmuje swoje kresy, tzn. istnieją liczby p, $q \in [a, b]$ takie, że $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ dla dowolnego $x \in [a, b]$.*

Twierdzenie 3.11. *Niech f będzie funkcją ściśle monotoniczną określoną na pewnym przedziale P. Wówczas funkcja odwrotna f^{-1} określona na obrazie $f(P)$ jest funkcją ciągła.*

4 Pochodne

1. Definicja

Niech f będzie określona na przedziale otwartym zawierającym punkt p. Przypuśćmy, że istnieje granica *ilorazów różnicowych*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Nazywamy tę granicę pochodną funkcji f w punkcie p i oznaczamy ją przez $f'(p)$ bądź $\frac{df}{dx}(p)$.

2. Styczna do wykresu

Załóżmy, że f jest różniczkowalna w punkcie p. Wówczas prostą o współczynniku kierunkowym $f'(p)$, przechodzącą przez punkt $(p, f(p))$ nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie p.

Definicja: Jeśliistnieje pochodna f w punkcie p, mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie p. Mówimy, że f jest różniczkowalna, jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.

3. Przykłady:

(i) Niech $f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$. Mamy, dla dowolnego $p \in \mathbb{R}$,

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{a(p+h) + b - (ap+b)}{h} = \lim_{h\to 0} a = a,$$

czyli $(ax + b)' = a$. Ponadto, jak łatwo widać, prostą styczną do wykresu f w punkcie p jest sama prosta f.

(ii) Niech $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, i niech $p \in \mathbb{R}$. Mamy

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{(p+h)^2 - p^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2p + h) = 2p$$

$((x^2)' = 2x)$, a prostą styczną wynosi $g(x) = 2px - p^2$.

(iii) Niech $f(x) = x^3$ i $p \in \mathbb{R}$. Mamy

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{(p+h)^3 - p^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3p^2 + 3ph + h^2) = 3p^2$$

$((x^3)' = 3x^2)$.

Ogólniej, mamy $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(iv) Niech $f(x) = |x|$. Jeśli $p > 0$ i $|h| < p$, to

$$\frac{|p+h| - |p|}{h} = \frac{p + h - p}{h} = 1,$$

wobec czego pochodna w punkcie p wynosi 1. Analogicznie, dla $p < 0$, pochodna f wynosi -1. Pozostaje zbadać przypadek $p = 0$: mamy

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = 1, \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = -1.$$

Wobec tego f nie ma pochodnej w zerze.

(v) Niech $f(x) = e^x$. Mamy

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x.$$

Innymi słowy, $(e^x)' = e^x$.

(vi) Niech $f(x) = \ln x$. Mamy

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x},$$

czyli $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

(vii) Wyznaczymy pochodną funkcji sinus. Mamy

$$(\sin x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sin h}{h} \cdot \cos x + \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \sin\right.$$

Wykorzystaliśmy tu, iż $lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ oraz

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \to 0} -\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 \cdot \frac{h}{1 + \cos h} = 0.$$

4. Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie 4.1 (O arytmetycznych własnościach pochodnej)**.** *Załóżmy, że f i g są różniczkowalne w punkcie p. Wówczas funkcje $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ oraz, o ile $g(p) \neq 0$, f/g, są różniczkowalne w punkcie p i zachodzą wzory*

$$(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p), \qquad (f-g)'(p) = f'(p) - g'(p),$$

$$(f \cdot g)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{(g(p))^2}.$$

W szczególności, jeśli a jest ustaloną liczbą rzeczywistą, to

$$(af(x))' = af'(x), \qquad (f(x)+b)' = f'(x).$$

Twierdzenie 4.2 (O pochodnej złożenia)**.** *Załóżmy, że g jest różniczkowalna w punkcie p, a funkcja f, o dziedzinie zawierającej zbiór wartości g, jest różniczkowalna w punkcie $g(p)$. Wówczas $f \circ g$ jest rórniczkowalen w punkcie p i zachodzi równość*

$$[f(g(p)]' = f'(g(p))g'(p).$$

Twierdzenie 4.3 (Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej)**.** *Załóżmy, że f jest różniczkowalna w punkcie p i $f'(p) \neq 0$. Ponadto, przypuśćmy, że f ma funkcję odwrotną f^{-1}, ciągłą w punkcie $q = f(p)$. Wówczas f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie q i $(f^{-1})'(q) = \frac{1}{f'(p)}$.*

Twierdzenie 4.4 (Twierdzenie o różniczkowaniu szeregu potęgowego)**.** *Załóżmy, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ma dodatni promień zbieżności. Wówczas szereg wolno różniczkować wyraz po wyrazie* wewnątrz przedziału zbieżności*:*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Twierdzenie 4.5. *Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p, to jest ciągła w punkcie p.*

5. Przykłady

(i) Wyznaczymy pochodną funkcji kosinus. Mamy $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, zatem

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{2} - x))' = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x)' = -\sin x.$$

(ii) Pora na tangens i kotangens. Korzystamy ze wzoru na pochodnaą ilorazu funkcji.

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x.$$

Analogicznie liczymy, że

$$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(iii) Funkcja tangens, ograniczona do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ma funkcję odwrotną arctg. Pochodna funkcji tg jest wszędzie niemniejsza niż 1, zatem w szczególności jest różna od 0. Wobec tego arctg jest różniczkowalna w każdym punkcie i mamy

$$1 = (x)' = (\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x))' = (1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}x)) \cdot (\mathrm{arctg}x)' = (1 + x^2) \cdot (\mathrm{arctg}x)'.$$

Zatem

$$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(iv) Niech a będzie dowolną liczbą dodatnią. Mamy

$$(x^a)' = (e^{a\mathrm{ln}x})' = e^{a\mathrm{ln}x} \cdot (a\mathrm{ln}x)' = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

(v) Niech a będzie ustaloną liczbą dodatnią różną od 1. Mamy

$$(a^x)' = (e^{x\mathrm{ln}a})' = e^{x\mathrm{ln}a} \cdot (x\mathrm{ln}a)' = a^x \cot \mathrm{ln}a.$$

6. Kilka ważnych twierdzeń.

Definicja Załóżmy, że funkcja f jest określona na pewnym przedziale zawierającym punkt x_0. Mówimy, że f ma

(i) miminum lokalne w x_0, jeśli dla x dostatecznie bliskich x_0 zachodzi nierówność $f(x) \geq f(x_0)$,

(ii) maximum lokalne w x_0, jeśli dla x dostatecznie bliskich x_0 zachodzi nierówność $f(x) \leq f(x_0)$.

(iii) ekstremyum lokalne w x_0, jeśli ma w x_0 minimum bądz maximum lokalne.

Twierdzenie 4.6 (O zerowaniu się pochodnej funkcji w punktach lokalnego ekstremum)**.** *Załóżmy, że funkcja f jest określona na pewnym przedziale zawierającym punkt x_0. Dodatkowo, przypuśćmy, że ma ona ekstremum lokalne w x_0 i jest różniczkowalna w x_0. Wówczas $f'(x_0) = 0$.*

Dowód: Przypuśćmy, że f ma w x_0 maximum lokalne. Oznacza to, iż dla $h < 0$ dostatecznie bliskich 0 mamy $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, czyli

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Wobec tego, zbiegając z $h \to 0^-$ dostajemy $f(x_0) \geq 0$. Z drugiej strony, dla $h > 0$ dostatecznie bliskich 0, mamy $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$, skąd wynika

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

i zbiegając z $h \to 0^+$ otrzymujemy $f'(x_0) \leq 0$. Zatem $f'(x_0) = 0$. Dowód dla minimum lokalnego jest analogiczny. □

Twierdzenie 4.7 (Rolle'a)**.** *Jeżeli f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$, jest różniczkowalna wewnątrz tego przedziału oraz $f(a) = f(b)$, to istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że $f'(c) = 0$.*

Twierdzenie 4.8 (Lagrange'a o wartości średniej)**.** *Załóżmy, że f jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$ i jest różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Wówczas istnieje punkt $c \in (a,b)$ taki, że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Wniosek 2 (Monotoniczność funkcji a znak pochodnej)**.** *Załóżmy, że f jest ciągła w każdym punkcie przedziału I oraz jest różniczkowalna wewnątrz tego przedziału. Wówczas*

(i) Funkcja f jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest nieujemna.
(ii) Funkcja f jest nierosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest niedodatnia.
(iii) Funkcja f jest malejąca, jeśli f' jest ujemna.
(iv) Funkcja f jest rosnąca, jeśli f' jest dodatnia.

7. Przykłady

(i) Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{1}{x}$, określoną na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mamy $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Ale widać, że f nie jest monotoniczna; dlaczego nie działa powyższy wniosek?

Kłopot sprawia punkt 0, w którym f nie jest określona. Funkcja f jest malejąca na $(-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$, zgodnie z powyższym stwierdzeniem.

(ii) Weźmy funkcję $f(x) = x^3$. Jak łatwo widać, f jest funkcją rosnącą, choć w niektórych punktach (konkretnie, w jednym - w zerze) jej pochodna $f'(x) = x^2$ się zeruje. Tak więc w punktach (iii) i (iv) nie ma równoważności.

(iii) Udowodnimy nierówność $\sin x < x$ dla $x > 0$. W tym celu rozważmy funkcję $f(x) = \sin x - x$ określoną na przedziale $[0, \infty)$. Mamy $f(0) = 0$ i $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, przy czym równość zachodzi tylko dla punktów postaci $2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Zatem f jest malejąca, czyli $f(x) < f(0) = 0$ dla $x > 0$.

(iv) Udowodnimy nierówność $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$, przy czym równość ma miejsce tylko dla $x = 0$. Ponieważ funkcje po obu stronach tej nierówności są parzyste, wystarczy ją udowodnić dla $x \geq 0$. Niech $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Mamy $f'(x) = -sinx + x > 0$ dla $x > 0$.

Zatem f jest rosnąca, czyli $f(x) \geq f(0) = 0$ i równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.

7. Styczna do wykresu a najlepsze lokalne przybliżenie funkcji wielomianem stopnia ≤ 1

Twierdzenie 4.9. *Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą w punkcie x. Wówczas równość*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - (ax+b)}{h} = 0$$

ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różniczkowalna w x oraz $a = f'(x)$, $b = f(x)$.

Dowód: Implikacja $\Leftarrow$ jest oczywista. Pozostaje zająć się wynikaniem w drugą stronę. Warunek

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - (ah+b)}{h} = 0$$

pociąga za sobą $\lim_{h\to 0} f(x+h) - a = b$, czyli $b = f(x)$. Ponownie korzystając z powyższej równości, mamy, iż

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a,$$

czyli f jest różniczkowalna w x i $f'(x) = a$. □

Powyższe twierdzenie oznacza można zapisać jako $f(x+h) \sim f(x) + f'(x)h$, przy czym $\sim$ oznacza, iż dla małych h obie strony ,,są bliskie": błąd przybliżenia jest mały w porównaniu do różnicy argumentów. Dla celów praktycznych, jest to bardzo nieprecyzyjne określenie: co to znaczy ,,małych" h? I co to znaczy ,,bliskie"?

Przykład:

(i) Mamy $\sqrt{101} = 10,04988\ldots$. Przybliżenie z powyższego twierdzenia daje

$$\sqrt{101} = \sqrt{100+1} \sim \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 1 = 10,05.$$

Bład jest mniejszy niż 0.0002.

(ii) Mamy $101^2 = 10201$. Przybliżenie z powyższego twierdzenia daje

$$(101)^2 = (100+1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 = 10200.$$

Tu widzimy, że błąd jest nieco większy i wynosi 1.

(iii) Mamy $e^{11} = 59874,14\ldots$. Przybliżenie z powyższego twierdzenia daje

$$e^{11} = e^{10+1} = e^{10} + e^{10} \cdot 1 = 44052.93\ldots.$$

Fatalnie. Bład rzędu 25%.

We wszystkich powyższych przykładach braliśmy $h = 1$. W pierwszych dwóch przykładach byly to h ,,małe". W ostanim - nie. Przyczyna leży w zachowaniu pierwszej pochodnej w okolicach przybliżanego punktu. W przykładzie (i), $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ zmienia się od $1/20$ do okolo $1/20,05$ - bardzo nieznacznie - zatem przybliżenie jest dobre. W przykładzie (ii) - $f'(x) = 2x$ zmienia się od 200 do 202 - czyli nieco bardziej, niż poprzednio - i za tym idzie pogorszenie jakości przybliżenia. W przykładzie (iii), $f'(x) = e^x$ zmienia się od $22026,47\ldots$ do $59874,14\ldots$, a zatem znacznie.

8. Reguła de l'Hospitala

Twierdzenie 4.10. *Załóżmy, że funkcje f, $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w każdym punkcie przedziału (a,b), $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ dla $x \in (a,b)$, istnieje granica $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G \in \overline{\mathbb{R}}$ oraz jest spełniony jeden z warunków*

(i) $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x\to a^+} g(x)$*,*

(ii) $\lim_{x\to a^+} |g(x)| = +\infty$*.*

Wówczas $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *istnieje i jest równa G.*

Analogiczne stwierdzenie zachodzi dla granic prawostronnych ($\lim_{x\to b^-}$*), a także obustronnych.*

Przykłady:

(i) Niech $a > 0$. Wówczas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$$

Możemy stosować regułę de l'Hospitala, bo mianownik dąży do $+\infty$; mamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{ax^a} = 0,$$

czyli to, co trzeba.

(ii) Niech $a \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

Jeśli $a \leq 0$, to jest to oczywiste. W przeciwnym razie, stosujemy regułę de l'Hospitala - wolno ją stosować, bo mianownik dąży do $+\infty$. Różniczkując, dostajemy do zbadania granicę

$$\lim_{x\to\infty} a\frac{x^{a-1}}{e^x}.$$

Jest to granica tego samego typu co wyjściowa: widzimy, że jedynie wykładnik zmniejszył się o 1 (i pojawił się czynnik a). Jeśli $a-1<0$, to granica wynosi 0 (oczywiste), a zatem wyjściowa granica wynosi 0.

Jeśli zaś $a-1>0$, to kontynuujemy to postępowanie i ponownie stosujemy de l'Hospitala; po k krokach dostajemy

$$\lim_{x\to\infty} a(a-1)\dots(a-k+1)\frac{x^{a-k}}{e^x}=0,$$

jeśli tylko k jest dostatecznie duże; zatem, na mocy de l'hospitala, wszystkie pośrednie granice, i wyjściowa granica, są równe 0.

(iii) Wykażemy, że

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=1.$$

Mamy $x^x=e^{x\ln x}$ i funkcja wykładnicza jest ciągła; wystarczy więc wykazać, że $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$. Ale

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}\ln\frac{1}{y}=-\lim_{y\to\infty}\frac{\ln y}{y}=0,$$

co udowodniliśmy w przykładzie (i).

4.1 Pochodne wyższych rzędów

1. Definicja Niech f będzie funkcją określona na pewnym przedziale I zawierającym punkt x. Przyjmijmy $f^{(0)}=f$. Załóżmy, że funkcja f ma pochodną $n-1$-szego rzędu $f^{(n-1)}$ w każdym punkcie przedziału I. Jeśli funkcja $f^{(n-1)}$ ma pochodną w punkcie x, to pochodną tę nazywamy pochodną n-tego rzędu funkcji f w punkcie x i oznaczamy przez $f^{(n)}(x)$. Jeśli pochodna n-tego rzędu jest skończona, to mówimy, że funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna w tym punkcie.

Uwaga: Zamiast pisać $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $f^{(3)}$ będziemy pisać f', f'', f'''.

2. Przykłady:

(i) Niech $f(x)=ax+b$. Mamy $f'(x)=a$ i $f''(x)=0$; wszystkie pochodne rzędu wyższego niż 2 także są równe 0.

(ii) Niech $f(x)=ax^2+bx+c$. Wówczas $f'(x)=2ax+b$, $f''(x)=2a$ i $f'''=f^{(4)}=\ldots=0$.

(iii) Ogólnie: jeśli W jest wielomianem stopnia k, to pochodne rzędów wyższych niż k zerują się.

(iv) Niech $f(x)=e^x$. Wówczas $f'(x)=e^x$ i ogólnie, dla każdego $k\geq 0$, $f^{(k)}(x)=e^x$.

(v) Niech $f(x)=\sin x$. Mamy $f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$. Widać więc, że następnymi pochodnymi będą $-\cos x$ i $\sin x$, a więc ciąg pochodnych jest okresowy: możemy w skrócie zapisać $f^{(2n)}(x)=(-1)^n\sin x$ i $f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n\cos x$.

(vi) Niech $f(x) = \ln x$. Mamy $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, ..., $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$.

3. Wielomian Taylora

Wcześniej przybliżaliśmy funkcję za pomocą wielomianu stopnia niewiększego niż 1: jeśli f jest różniczkowalna w punkcie x, to

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - (f'(x)h + f(x))}{h} = 0.$$

Bład przybliżenia jest mały w porównaniu z h (z rórnicą argumentów $x+h$, x). Powstaje naturalne pytanie,zy można jakoś to przybliżenie poprawić, jeśli założymy, że f jest więcej razy różniczkowalna?

Zacznijmy od uściślenia terminu ,,poprawić przybliżenie". Otóż zacznijmy od spostrzeżenia, że gdy h jest bliskie 0, to $|h|^2$ jest znacznie mniejsze niż $|h|$; ogólniej, jeśli $n > m$, to $|h|^n$ jest znacznie mniejsze niż $|h|^m$. Zatem interesowałyby nas wielomiany, które spełniałyby warunek

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - W(h)}{h^n} = 0$$

i do tego, najlepiej, z jak największym n. Okazuje się, że daje się takie wielomiany wyznaczyć, o ile f jest dostatecznie wiele razy różniczkowalna; ale otrzymane wielomiany są na ogół wyższych stopni.

Definicja: Załórmy, że f ma n-tą pochodną w punkcie x. Wielomian

$$W_n(h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n$$

nazywamy n-tym wielomianem Taylora w punkcie x. Różnicę

$$r_n(h) = f(x+h) - W_n(h)$$

nazywamy n-tą resztą.

Równość

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + r_n(h)$$

nazywana bywa wzorem Taylora z resztą Peano.

Twierdzenie 4.11 (Peano)**.** *Jeśli f jest funkcją n-krotnie różniczkowalną w punkcie x, to* $\lim_{h \to 0} \frac{r_n(h)}{h^n} = 0$.

Dowód: Udowodnimy to przy dodatkowym założeniu, że f jest n-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x: stosujemy n razy regułę de l'Hospitala. $\square$

Twierdzenie 4.12 (O jednoznaczności wielomianu Taylora)**.** *Jeśli f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie x i W jest wielomianem stopnia niewiększego niż n takim, że*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - W(x)}{h^n} = 0,$$

to W jest wielomianem Taylora funkcji f w punkcie x.

Twierdzenie 4.13 (O lokalnych ekstremach)**.** *Załóżmy, że f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie x_0 oraz że $0 = f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0)$ i $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Wówczas jeśli n jest nieparzyste, to f nie ma lokalnego ekstremum w punkcie x_0, w dowolnym otoczeniu tego punktu przyjmuje zarówno wartości większe, jak i mniejsze niż $f(x_0)$. Jeśli n jest parzyste, to f ma w punkcie x_0 lokalne ekstremum właściwe: minimum, gdy $f^{(n)}(x_0) > 0$, maksimum, gdy $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Twierdzenie 4.14 (O reszcie w postaci Lagrange'a)**.** *Załóżmy, że f jest $n{+}1$-krotnie różniczkowalna wewnątrz przedziału zawierającego punkty x oraz $x+h$. Wówczas istnieje punkt θ_h leżący między tymi punktami, taki, że*

$$r_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

4.2 Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy

1. Różniczkowanie/całkowanie znanych rozwinięć

Przykłady:

(i) Mamy, dla $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.$$

Dodatkowo, mamy $[\ln(1+x)]' = \frac{1}{1+x}$. To sugeruje, aby rozważyć funkcję

$$g(x) = \ln(1+x) - [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots],$$

określoną dla $|x| < 1$ (szereg potęgowy w kwadratowym nawiasie ma promień zbieżności równy 1). Mamy $g'(x) = 0$, skąd wynika, że funkcja g jest stała: $g(x) = g(0) = 0$, czyli

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \ |x| < 1.$$

(ii) Mamy, dla $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

Dodatkowo, $[\mathrm{arctg}x]' = \frac{1}{1+x^2}$. Rozważmy funkcję

$$g(x) = \mathrm{arctg}x - [x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots],$$

określoną na zbiorze $(-1, 1)$. Ponieważ $g'(x) = 0$, więc g jest funkcją stałą, a zatem $g(x) = g(0) = 0$ i

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \ |x| < 1.$$

2. Szacowanie reszty w rozwinięciu w szereg Taylora
Będziemy korzystać z reszty w postaci Lagrange'a.
Przykłady:
(i) Niech $f(x) = \sin x$. Rozwiniemy tę funkcję w zerze. Mamy, dla $h \in \mathbb{R}$,

$$|r_n(h)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta_h)}{(n+1)!} h^{n+1} \right| \leq \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{gdy } n \to \infty,$$

czyli, innymi słowy, $|f(h) - W_n(h)| \to 0$ gdy $n \to \infty$. To zaś oznacza, że dla każdego h,

$$\sin h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} h^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ h \in \mathbb{R}.$$

(ii) Niech $f(x) = \cos x$. Mamy

$$\cos x = (\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ h \in \mathbb{R}.$$

4.3 Funkcje wypukłe i wklęsłe. Nierówność Jensena

1. Definicja Niech f będzie funkcją określoną na pewnym przedziale I. Mówimy, że f jest funkcją

(i) wypukłą, jeśli dla dowolnych różnych $x, y \in I$ oraz $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi nierówność $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. (ii) ściśle wypukłą, jeśli dla dowolnych różnych $x, y \in I$ oraz $\lambda \in (0, 1)$ zachodzi nierówność $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. (iii) wklęsła (ściśle wklęsła), jeśli $-f$ jest wypukła (ściśle wypukła).

Przykład:

(i) Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest i wypukła, i wklęsła. Nie jest natomiast ani ściśle wypukła, ani ściśle wklęsła; mamy bowiem, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ i $\lambda \in (0, 1)$, iż

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = a(\lambda x + (1-\lambda)y) + b = \lambda(ax + b) + (1-\lambda)(ay + b) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

(ii) Funkcja kwadratowa $f(x) = x^2$ jest ściśle wypukła. Aby to zobaczyć, weźmy $x \neq y$ i $\lambda \in (0, 1)$. Mamy

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = (\lambda x + (1-\lambda)y)^2$$
$$= \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Twierdzenie 4.15. *Każda funkcja wypukła jest funkcją ciągła. Każda funkcja wklęsła jest funkcją ciągła.*

Druga pochodna stanowi bardzo wygodne narzędzie do badania wypukłości funkcji. Dodatkowo, wprowadźmy lewo- i prawostronna pochodna funkcji:

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Twierdzenie 4.16. *Załóżmy, że funkcja f, określona na przedziale I, jest ciągła i dwukrotnie różniczkowalna na I, za wyjątkiem punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wówczas jeśli są spełnione warunki*

(i) $f''(x) \geq 0$ dla $x \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, x_n$,

(ii) $f_-(x_i) \leq f_+(x_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,

to funkcja f jest wypukła. Dodatkowo, jeśli zbiór złożony z tych x, dla których zachodzi równość $f''(x) = 0$, nie zawiera żadnego przedziału, to f jest ściśle wypukła.

W sposób oczywisty powyższe stwierdzenie modyfikuje się na przypadek funkcji wklęsłych.

Przechodzimy do głównego twierdzenia dotyczącego funkcji wypukłych/wklęsłych.

Twierdzenie 4.17 (Nierówność Jensena)**.** *Załóżmy, że f jest funkcją wypukła określoną na pewnym przedziale I. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ oraz $t_1, t_2, \ldots, t_n \geq 0$ spelniają warunek $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$. Wówczas*

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \ldots + t_nf(x_n).$$

Ponadto, jeśli f jest ściśle wklęsła, wagi t_i są dodatnie oraz co najmniej dwie spośród liczb x_i są różne, to nierówność jest ostra.

Mamy analogiczne stwierdzenie dla funkcji wklęsłych.

Przykład: Udowodnimy nierówność między średnią geometryczną a średnią arytmetyczną: dla $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n > 0$,

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Zlogarytmujmy tę nierówność; otrzymujemy równoważną postać

$$\frac{1}{n}\left[\ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n\right] \leq \ln\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right).$$

Jest to nierówność Jensena dla funkji wklęsłej $f(x) = \ln x$ (mamy bowiem $f''(x) = -x^{-2} < 0$), $x_i = a_i$, oraz $t_i = \frac{1}{n}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

5 Funkcje wielu zmiennych. Ciągłość.

5.1 Definicja iloczynu sklarnego i normy. Własności podzbiorów w $\mathbb{R}^n$

Definicja Niech k będzie liczbą całkowitą dodatnią. Wówczas k-wymiarową przestrzenią kartezjańską nazywamy zbiór

$$\mathbb{R}^k = \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_k), \quad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ 2\ \ldots,\ k\}.$$

Definicja Niech $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$. Wówczas

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_k y_k$$

nazywamy iloczynem skalarnym wektorów x i y.

Definicja

Normą wektora $x \in \mathbb{R}^k$ indukowaną przez iloczyn skalarny nazywamy liczbę $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$. Tę normę nazywamy euklidesową.

Podstawowe własności normy.

a) $||x|| \geq 0$. Ponadto, $||x|| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$.
b) Dla dowolnej liczby rzeczywistej t mamy $||tx|| = |t| \cdot ||x||$.
c) Dla dowolnych x, y mamy $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.
d) Dla dowolnych x, y mamy $(x, y) \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Definicja odległości w $\mathbb{R}^k$

Niech x, $y \in \mathbb{R}^k$. Wówczas liczbę $d(x,y) = ||x-y||$ możemy interpretować jako odległość między wektorami x, y.

Definicja kuli k-wymiarowej
Niech $r > 0$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Wówczas kulą otwartą o środku w x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^k : ||x-x_0|| < r\}.$$

Kulą domkniętą o środku w x_0 i promieniu r nazywamy zbiór

$$B(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}^k : ||x-x_0|| \leq r\}.$$

Definicja
Zbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ jest
- otwarty, jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje $r > 0$ takie, że $B(x,r) \subset A$.
- domknięty, jeśli jego dopełnienie $\mathbb{R}^k \setminus A$ jest zbiorem otwartym.
- ograniczony, jeśli istnieje $r > 0$ takie, że $A \subset B(0,r)$.
- zwarty, jeśli jest ograniczony i domknięty.
- wypukły, jeśli dla dowolnych x, $y \in A$, $x \neq y$, odcinek o końcach x, y jest zawarty w A.

5.2 Zbieżność i ciągłość

Definicja.
Niech (x_n) będzie ciągiem wektorów z $\mathbb{R}^k$ oraz $x \in \mathbb{R}^k$. Wówczas mówimy, że ciąg (x_n) jest zbieżny do x (oznaczenie: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$), jeśli $\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$.

Uwaga: Ciąg (x_n) jest zbieżny do x wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ mamy $\lim_{n\to\infty} x_n^j = x^j$: mamy zbieżność po każdej współrzędnej.

Definicja
Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}^k$, $f : A \to \mathbb{R}$ i a będzie punktem skupienia zbioru A. Wówczas $g \in \overline{\mathbb{R}}$ jest granicą funkcji f w punkcie a, jeśli dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do a, o wyrazach różnych niż a, mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Oznaczenie: $\lim_{x\to a} f(x) = g$.

Twierdzenie 5.1. *Niech $A \subset \mathbb{R}^k$, $f,g,h : A \to \mathbb{R}^k$ i a będzie punktem skupienia zbioru A. Jeśli istnieje $r > 0$ takie, że*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

dla $x \in B(a,r)$ (czyli x dostatecznie bliskich a), $x \neq a$, oraz istnieją granice $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = g \in \overline{R}$, to istnieje także $\lim_{x\to a} g(x)$ i jest ona równa g.

Definicja

Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}^k$, $x \in A$ i $f : A \to \mathbb{R}^n$. Wówczas f jest ciągła w punkcie x, jeśli jest spełniony jeden z warunków:

(i) x nie jest punktem skupienia zbioru A.

(ii) x jest punktem skupienia zbioru A i dla dowolnego ciągu (x_n) zbieżnego do x mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Wniosek

Niech $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : A \to R^n$, gdzie A jest podzbiorem R^k, i $x \in A$. Wówczas f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje współrzędne $f_m : A \to \mathbb{R}$, $1 \le m \le n$, są ciągłe w x.

Definicja

Niech A będzie podzbiorem $\mathbb{R}^k$ i $f : A \to \mathbb{R}^n$. Wówczas f jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Twierdzenie 5.2. *Złożenie, suma, różnica, iloczyn i iloraz (o ile mianownik się nie zeruje) funkcji ciągłych są funkcjami ciągłymi, o ile tylko spełnione są odpowiednie założenia dotyczące dziedzin funkcji (analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym).*

Twierdzenie 5.3 (Weierstrass)**.** *Niech K będzie podzbiorem zwartym $\mathbb{R}^k$ i $f : K \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas istnieją x, $y \in K$ takie, że $f(x) = \sup_K f$ oraz $f(y) = \inf_K f$.*

Przykłady:

(i) Niech k będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dane wzorami

$$f(x, y) = x^k, \qquad g(x, y) = y^k$$

są funkcjami ciągłymi.

(ii) Niech W będzie dowolnym wielomianem dwóch zmiennych:

$$W(x, y) = \sum_{k,l} a_{kl} x^k y^l, \text{ gdzie } a_{kl} \in \mathbb{R},$$

jest funkcją ciągłą.

(iii) Niech W będzie dowolnym wielomianem n zmiennych:

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n} a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}, \text{ gdzie } a_{k_1 \dots k_n} \in \mathbb{R},$$

jest funkcją ciągłą.

(iv) Funkcja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

będąca złożeniem ciągłych funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadanych wzorami $g(t) = \sqrt{t}$ i $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, jest ciągła.

(v) Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dana wzorem $f(x) = (\sin x, e^x, \frac{x}{x^2+1})$ jest ciągła, gdyż wszystkie jej funkcje współrzędne są ciągłe.

(vi) Funkcja $f : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dana wzorem

$$f(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

jest ciągła; obie funkcje współrzędne są ciągłe.

(vii) Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{jeśli } (x, y) = 0, \end{cases}$$

jest ciągła w każdym punkcie $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, jako iloraz funkcji ciągłych. Nie jest natomiast ciągła w zerze. Weźmy bowiem ciąg $((n^{-1}, 0))_{n \geq 1}$ zbieżny do $(0, 0)$. Mamy

$$\lim_{n \to \infty} f(n^{-1}, 0) = \lim_{n \to \infty} n = \infty \neq 0 = f(0, 0).$$

6 Pochodne funkcji wielu zmiennych

6.1 Pochodne cząstkowe

Zacznijmy od zdefiniowania pochodnych cząstkowych.

Definicja

Niech funkcja $f : G \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją określoną na pewnym podzbiorze otwartym $G \subset \mathbb{R}^n$. Pochodną cząstkową funkcji f zw względu na zmienną x_i w punkcie $p \in G$, $1 \leq i \leq n$, nazywamy granicę

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p + he_i) - f(p)}{h},$$

o ile istnieje. Tutaj e_i oznacza wektor $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, gdzie 1 stoi na i-tym miejscu. Tę pochodną oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Przykłady:
(i) Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y + z^5.$$

Jak łatwo widać z definicji, pochodną czastkową po x liczymy następująco: traktujemy y oraz z jako stałe i liczymy zwykłą, jednowymiarową pochodną traktując f jako funkcję zmiennej x. Analogicznie z pochodnymi cząstkowymi po y i z:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 5z^4.$$

(ii) Niech $f : (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem

$$f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi).$$

Wówczas

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\phi) = (\cos\phi, \sin\phi), \qquad \frac{\partial f}{\partial \phi}(r,\phi) = (-r\sin\phi, r\cos\phi).$$

(iii) Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Jeśli $(x,y) \neq (0,0)$, to oczywiście

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Jeśli zaś $(x,y) = (0,0)$, to liczymy z definicji: pochodna cząstkowa po x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h^2}$$

nie istnieje, a po y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

(iv) Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma pochodne cząstkowe w każdym punkcie: dla $(x,y) \neq (0,0)$ mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x^2y+y^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Natomiast f nie jest ciągła! Weźmy bowiem ciąg (n^{-1}, n^{-1}), zbieżny do $(0,0)$. Mamy

$$\lim_{n\to\infty} f(n^{-1}, n^{-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Definicja

Niech $f : G \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na otwartym podzbiorze $G \subset \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że funkcja f posiada wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie $p \in G$. Wówczas wektor

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right]$$

nazywamy gradientem funkcji f w punkcie p.

6.2 Różniczkowalność w punkcie

Spójrzmy jeszcze raz na definicję pochodnej w jednym wymiarze. Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x, jeśli

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0.$$

Definicja Niech $f : G \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją określoną na podzbiorze otwartym $\mathbb{R}^n$ i $p \in G$. Wówczas f jest różniczkowalna w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ takie, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(p+h) - f(p) - Ah||}{||h||} = 0.$$

Przekształcenie A nazywamy różniczką funkcji f w punkcie p i oznaczamy $Df(p)$ lub $df(p)$.

Uwaga:

Różniczka wyznaczona jest w sposób jednoznaczny.

Warunek wystarczający dla różniczkowalności

Załóżmy, że funkcja $f : G \to \mathbb{R}^k$, określona na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$ ma wszystkie pochodne cząstkowe w każdym punkcie pewnej kuli otwartej $B(p, \varepsilon)$ i pochodne te są ciągłe w punkcie p. Wówczas f jest różniczkowalna w punkcie p i

$$Df(p)h = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} h_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n,$$

gdzie $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Warunek konieczny różniczkowalności

Załóżmy, że funkcja $f : G \to \mathbb{R}^k$, określona na otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w punkcie $p \in G$, to ma ona w tym punkcie pochodną cząstkową względem każdej ze zmiennych x_1, $x_2, \ldots, x_n$ i dla każdego m mamy wzór

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = Df(p)e_j,$$

gdzie, jak wcześniej, e_j oznacza wektor mający zero na każdej współrzędnej za wyjątkiem j-tej, na której jest 1.

Twierdzenie o ciągłości funkcji różniczkowalnej

Jeśli funkcja $f : G \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w punkcie p, to jest także ciągła w punkcie p.

Przykłady:

(i) Niech $f(x, y) = (x + 2y, 3x^2 + 4y^2)$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1, 6x) \text{ oraz } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2, 8y).$$

Pochodne cząstkowe oczywiście są ciągłe, zatem f jest różniczkowalna w każdym punkcie. Ponadto,

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6x & 8y \end{bmatrix}.$$

(ii) Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{jeśli } (x, y) \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Obliczmy pochodne cząstkowe. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{jeśli } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{jeśli } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i symetrycznie,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Udowodnimy ciągłość pochodnych cząstkowych. Ze względu na wspomnianą wyżej symetrię zmiennych x oraz y, wystarczy zająć się pochodną cząstkową po x. Jest ona ciągła w każdym punkcie $(x,y) \neq (0,0)$. Niech teraz (x_n, y_n) będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $(0,0)$. Mamy

$$\left| \frac{2x_n^5}{(x_n^2+y_n^2)^2} \right| \leq 2|x_n|,$$

a zatem z twierdzenia o trzech ciągach,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2x_n^5}{(x_n^2+y_n^2)^2} \right| = 0,$$

a więc także

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^5}{(x_n^2+y_n^2)^2} = 0.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4x_n^3y_n^2}{(x_n^2+y_n^2)^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2x_ny_n^4}{(x_n^2+y_n^2)^2} = 0.$$

Tak więc, na mocy warunku wystarczającego różniczkowalności, funkcja f jest różniczkowalna, a zatem także ciągła. Jej rórniczka dna jest wzorem

$$Df(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{(x^2+y^2)^2} \right) & \text{jeśli } (x,y) \neq (0,0), \\ (0,0) & \text{jeśli } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Twierdzenie o arytmetycznych własnościach różniczki

(i) Jeśli $f,\ g : G \to \mathbb{R}^k$ są różniczkowalne w punkcie p, to ich suma oraz różnica także są różniczkowalne w punkcie p i mamy

$$D(f+g)(p) = Df(p) + Dg(p),\ \ D(f-g)(p) = Df(p) - Dg(p).$$

(ii) Jeśli f, g są określone na pewnym zbiorze otwartym, są różniczkowalne w punkcie p i jest określony ich iloczyn (np. f ma wartości w $\mathbb{R}$, bądź f i g mają wartości w $\mathbb{R}^k$ i ich iloczyn to iloczyn skalarny), to ich iloczyn jest różniczkowalny w punkcie p i

$$D(fg)(p) = Df(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot Dg(p).$$

Twierdzenie o różniczce złożenia dwóch funkcji

Jeśli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie p, a funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $g(p)$ oraz zbiór wartości g jest zawarty w dziedzinie funkcji f, to złożenie $f \circ g$ jest różniczkowalne w punkcie p i zachodzi równość $D(f \circ g)(p) = Df(g(p)) \cdot Dg(p)$. Tu $\cdot$ oznacza mnożenie macierzy.

Przykłady

(i) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi i niech $h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wówczas

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \text{ oraz } \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Istotnie, mamy bowiem

$$Dh(x, y) = Dg(f(x, y)) \cdot Df(x, y) = f'(g(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right).$$

(ii) Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną oraz

$$h(x, y) = f(x^2 + y^3, 2x + y).$$

Wyznaczymy pochodne cząstkowe funkcji h. Otóż ta funkcja jest złożeniem funkcji f i g, gdzie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dana jest wzorem $g(x, y) = (x^2 + y^3, 2x + y)$. Zatem

$$Dh(x, y) = Df(g(x, y)) \cdot Dg(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(x, y)), \frac{\partial f}{\partial y}(g(x, y))\right) \cdot \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^3, 2x + y) \cdot 2x + \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^3, 2x + y) \cdot 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^3, 2x + y) \cdot 3y^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(x^2 + y^3, 2x + y) \cdot 1\Big).$$

Pochodna kierunkowa

Niech $f : G \to \mathbb{R}^k$ będzie funkcją określona na pewnym podzbiorze otwartym w $\mathbb{R}^n$ i $p \in G$, $v \in R^n$. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie p w kierunku wektora v nazywamy granicę

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

o ile ta granica istnieje. Oznaczenie: $f'_v(p)$.

Uwaga: Mamy
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f'_{e_i}.$$

Przykład:
Niech $v = (1,2)$, $f(x,y) = 3x^2 + 5\sin y$. Wówczas
$$f'_v(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,2t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{3t^2 + 5\sin t}{t} = 5.$$

Twierdzenie o istnieniu pochodnych kierunkowych w punktach różniczkowalności funkcji
Jeśli $f : G \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w punkcie p, to dla każdego v istnieje pochodna kierunkowa $f'_v(p)$ i zachodzi równość $f'_v(p) = Df(p)v$.

Zatem, przy ustalonym p, pochodna kierunkowa jest liniową funkcją wektora v.

Twierdzenie o kierunku najszybszego wzrostu funkcji
Pochodna funkcji f w kierunku gradientu funkcji w danym punkcie p jest największą spośród wszystkich pochodnych kierunkowych w kierunku wektorów o długości $||\mathrm{grad} f(p)||$.

Twierdzenie o zerowaniu się gradientu w punktach lokalnego ekstremum
Załóżmy, że f ma ekstremum lokalne w punkcie p i jest różniczkowalna w punkcie p. Wówczas $\mathrm{grad} f(p) = 0$, czyli, innymi słowy, wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie p się zerują.

Wektor styczny do zbioru
Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem, a $\gamma : (a,b) \to A$ będzie funkcją różniczkowalną w punkcie $t_0 \in (a,b)$. Wówczas mówimy, iż wektor $\gamma'(t_0)$ jest styczny do zbioru A w punkcie p. Zbiór wszystkich wektorów postaci $p + v$, gdzie v jest pewnym wektorem stycznym do A w punkcie p, nazywamy przestrzenią styczną.

Przykłady:
(i) Znajdziemy niezerowy wektor styczny do zbioru $A = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 16$ w punkcie $p = (2\sqrt{3}, 1)$. Najpierw znajdźmy krzywą γ o wartościach w zbiorze ∂A. Otóż brzeg A dany jest wzorem $x^2 + 4y^2 = 16$, czyli krzywa
$$\gamma(x) = (x, \sqrt{4 - x^2/4}), \qquad x \in (-4,4),$$

leży w ∂A. Dodatkowo, $\gamma(2\sqrt{3}) = p$. Zatem $v = \gamma'(2\sqrt{3}) = (1, -\sqrt{3}/2)$ jest styczny do A w punkcie p. Jak łatwo zauważyć, każdy wektor styczny do A w punkcie p jest proporcjonalny do v. Ponadto, v jest prostopadły do gradientu funkcji $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ w punkcie p.

(ii) Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Niech

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = a\} \text{ dla pewnego } a \in \mathbb{R}.$$

(mówimy, że A jest poziomicą funkcji f). Załóżmy, że $p \in A$ oraz $\mathit{gradf}(p) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Wówczas można wykazać, że zbiór wektorów stycznych do A w punkcie p to zbiór wszystkich wektorów prostopadłych do gradientu funkcji f. Dostajemy więc *hiperpłaszczyznę styczną*.

I tak, np. niech

$$A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 100\}$$

będzie sferą o promieniu 10. Zbiór wektorów stycznych do A w punkcie $(6, 8, 0)$ to zbiór wszystkich wektorów prostopadłych do $(12, 16, 0)$; płaszczyzną styczną jest $12x + 16y = 200$.

Przykłady: wyznaczanie największych i najmniejszych wartości funkcji na zbiorze zwartym

(i) Wyznaczymy największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ na zbiorze

$$A = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}.$$

Zbiór A jest zbiorem zwartym a f jest ciągła, wobec tego na mocy twierdzenia Weierstrassa funkcja f przyjmuje swoje kresy. Są dwie możliwości: albo przyjmuje je na brzegu, albo wewnątrz zbioru. Jeśli f ma ekstremum wewnątrz A, to gradient f się tam zeruje.

Zatem metoda jest następująca: najpierw liczymy punkty zerowania się gradientu:

$$\mathrm{grad} f(x, y) = (2x - 2, 2y - 2),$$

zatem $\mathrm{grad} f(x, y) = (0, 0)$ wtedy i tylko wtedy gdy $(x, y) = (1, 1)$. Mamy $f(1, 1) = -2$.

Zbadajmy teraz brzeg A. Jest on sumą trzech odcinków. Najpierw weźmy $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq 3\}$. Mamy $f(x, 0) = x^2 - 2x$ i najmniejszą wartością f na tym zbiorze jest -1, a największą 3. Analogiczny wynik dostajemy dla odcinka $\{(0, y) : 0 \leq y \leq 3\}$. Pozostaje więc odcinek $\{(x, 3 - x) : 0 \leq x \leq 3\}$ i mamy $f(x, 6 - x) = 2x^2 - 6x + 3$. Najmniejszą wartością tej funkcji jest $-1\frac{1}{2}$, a największą 3.

Tak więc $\max_A f = 3$, $\min_A f = -2$.

(ii) Rozważmy funkcję $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - 2y}.$$

Wyznaczymy kresy funkcji f. Zauważmy najpierw, że dziedzina funkcji f nie jest zbiorem zwartym, tak więc nie możemy bezpośrednio użyć twierdzenia Weierstrassa; będziemy potrzebować dodatkowego argumentu.

Zacznijmy od wyznaczenia kresu dolnego - jest to bardzo proste: oczywiście funkcja f przyjmuje wartości nieujemne i $f(0,0)=0$. Tak więc $\inf f=0$.

Teraz zajmijmy się kresem górnym. Ponieważ $t<e^t$ dla $t\geq 0$, możemy napisać

$$f(x,y)=\frac{x+y}{e^{x^2+2y}}\leq\frac{e^{x+y}}{e^{x^2+2y}}=e^{x-x^2-y}\to 0$$

gdy $||(x,y)||\to\infty$. Wynika stąd, iż przy szukaniu kresu górnego f, wystarczy ograniczyć się do zbioru $K=[0,M]\times[0,M]$ dla dostatecznie dużego M.

Zbiór ten jest zwarty, a zatem wolno nam zastosować twierdzenie Weierstrassa: funkcja f przyjmuje swą największą wartość bądź wewnątrz K bądź na jego brzegu. Jeśli chodzi o brzeg, wystarczy ograniczyć się do kawałków zawartych w osiach układu (bo na pozostałych dwóch, jak wynika z powyższego oszacowania, funkcja przyjmuje małe wartości).

Mamy $f(x,0)=xe^{-x^2}$. Ta funkcja jednej zmiennej ma pochodn'a $(1-2x^2)e^{-x^2}$, a zatem przyjmuje swą największą wartość dla $x=1/\sqrt{2}$ i wynosi ona $(2e)^{-1/2}$. Ponadto, $f(0,y)=ye^{-y}$ ma pochodną $(1-y)e^{-y}$, skąd przyjmuje ona największą wartość dla $y=1$, wynoszącą e^{-1}.

Wreszcie, policzmy gradient f i zbadajmy, gdzie się ojn zeruje. Mamy

$$\mathrm{grad} f(x,y)=\left((1-2x^2-2xy)e^{-x^2-y},(1-x-y)e^{-x^2-y}\right)$$

i jest on równy $(0,0)$ dla $x=y=1/2$. Ponadto $f(1/2,1/2)=e^{-3/4}$ i jak łatwo sprawdzić porównując z poprzednimi maksimami, jest to największa wartość funkcji f.

6.3 Pochodne wyższych rzędów funkcji wileu zmiennych

Ograniczymy się do funkcji o wartościach rzeczywistych: w tym rozdziale rozpatrujemy funkcje $f:G\to\mathbb{R}$ określone na pewnym otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$.

Definicja: Jeśli funkcja $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ma pochodną cząstkową względem x_j w punkcie $p\in G$, to tę pochodną nazywamy pochodną cząstkową drugiego rzędu względem zmiennych x_i, x_j i oznaczamy przez

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(p)\quad \text{jeśli } i\neq j, \text{(tzw. pochodne mieszane)}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(p)\quad \text{jeśli } i=j.$$

Analogicznie definiujemy pochodne wyższych rzędów.

Przykład:

Niech $f(x,y) = x^2 + 3xy - 5y^3$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x - 15y^2$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 3,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -30y.$$

Definicja:

Macierzą drugiej różniczki w puncie $p \in G$ nazywamy macierz

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) \right),$$

o ile wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu w punkcie p istnieją.

Twierdzenie 6.1 (Schwarza o symetrii drugiej różniczki)**.** *Jeśli funkcja f ma pochodne mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ na G i są one ciągłe w punkcie $p \in G$, to*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

Innymi słowy, macierz drugiej różniczki jest macierzą symetryczną dla dostatecznie regularnych funkcji f.

Definicja: Wielomian Taylora stopnia 2 i druga reszta

Załóżmy, że funkcja f ma wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie $p \in G$. Wielomianem Taylora stopnia 2 w punkcie p nazywamy wielomian zmiennych $h_1,\, h_2,\, \ldots, h_n$

$$T_2(h_1,\, h_2,\, \ldots, h_n) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) h_i h_j.$$

Drugą resztą w punkcie p nazywamy różnicę

$$r_2(h) = f(p+h) - T_2(h).$$

Przykład:

Niech $f(x,y) = sin(xy) + y^2 + y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy) + 2y + 1$$

oraz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2.$$

Zatem wielomian Taylora stopnia 2 w punkcie $(0,0)$ wynosi

$$T_2(h) = f(0,0) + h_2 + h_1 h_2 + h_2^2.$$

Twierdzenie 6.2 (Peano)**.** *Jeśli funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu w zbiorze G, to dla każdego $p \in G$ mamy*

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_2(h)}{||h||^2} = 0.$$

Teraz możemy przejść do badania ekstremów lokalnych funkcji dwukrotenie różniczkowalnej.

Twierdzenie 6.3. *Załóżmy, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Załóżmy, że $gradf(p) = 0$. Niech A będzie macierzą drugiej różniczki funkcji f w punkcie p.*

(i) Jeśli macierz A jest dodatnio określona, to f ma w punkcie p lokalne minimum właściwe.

(ii) Jeśli macierz A jest ujemnie określona, to f ma w punkcie p lokalne maksimum właściwe.

(iii) Jeśli istnieją wektory v, $w \in \mathbb{R}^n$ takie, że $Av \cdot v < 0 < Aw \cdot w$, to w punkcie p funkcja f nie ma lokalnego ekstremum.

Dodatnia/ujemna określoność i kryterium Sylwestera

Definicja:

Kwadratowa macierz A jest dodatnio określona, jeśli dla dowolnego wektora $x \neq 0$ zachodzi nierówność $Ax \cdot x > 0$. Macierz A jest ujemnie określona, jeśli $-A$ jest dodatnio określona.

Twierdzenie 6.4 (Sylwester)**.** *Niech $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ będzie macierzą. Niech $M_k = det(a_{ij})_{i,j=1}^k$. Wówczas:*

(i) jeśli liczby M_1, $M_2, \ldots, M_n$ są dodatnie, to macierz A jest dodatnio określona.

(ii) Jeśli $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, $M_3 < 0$, $\ldots$ to macierz A jest ujemnie określona.

Przykłady: wyznaczanie ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych

(i) Rozważmy $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ daną przez $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + yz$. Mamy

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y + z, 2z + y),$$

a zatem jedynym punktem osobliwym jest $(0,0,0)$. Macierz drugiej różniczki w tym punkcie wynosi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

i $M_1 = 2$, $M_2 = 4$, $M_3 = 6$. Zatem w punkcie $(0,0,0)$ funkcja f ma minimum lokalne. Jak łatwo sprawdzić, jest to minimum globalne.

(ii) Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x,y) = xy^2 + 8x^2 + y^2.$$

Wyznaczmy punkty osobliwe; rozwiązujemy układ równań

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 + 16x = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(x+1) = 0.$$

Z drugiego równania wynika, że $y = 0$ lub $x = -1$. Jeśli $y = 0$, to z pierwszego równania wyznaczamy $x = 0$. Jeśli zaś $x = -1$, to z pierwszego równania mamy $y = 4$ lub $y = -4$. Tak więc mamy trzy punkty osobliwe: $(0,0)$, $(-1,4)$ i $(-1,-4)$.

Liczymy macierz drugiej różniczki:

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 16 & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}.$$

I teraz badamy dodatnią/ujemną określoność $D^2 f$ w punktach osobliwych:

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_1,\ M_2 > 0 \text{ - minimum lokalne},$$

$$D^2 f(-1,-4) = \begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_1 > 0,\ M_2 < 0 \text{ - brak ekstremum},$$

$$D^2 f(-1,4) = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_1,\ M_2 > 0 \text{ - brak ekstremum}.$$

7 Ekstrema warunkowe i mnożniki Lagrange'a

Rozważmy następujący problem. Przypuśćmy, iż szukamy ekstremów funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na zbiorze

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : F_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k.\}.$$

Twierdzenie 7.1. *Załóżmy, że funkcje F_i mają ciągłe pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu zbioru K oraz że macierz $DF(x) = [\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x)]_{i,j}$ jest pełnego rzędu na zbiorze K. Wówczas jeśli funkcja f, mająca ciągłe pochodne cząstkowe na K, przyjmuje w punkcie $x \in K$ wartość najmniejszą bądź największą, to istnieją $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ takie, że*

$$grad f(x) = \lambda_1 grad F_1(x) + \lambda_2 grad F_2(x) + \ldots + \lambda_k grad F_k(x).$$

Przykłady:

(i) Wyznaczymy największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = xy$ na zbiorze $x^2+2y^2 = 1$. Tak więc

$$K = \{(x,y) : x^2 + 2y^2 - 1 = 0\},$$

czyli $F(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$. Zarówno f, jak i F są odpowiednio gładkie, ponadto $DF(x) = [2x,\ 4y]$ jest pełnego rzędu (tj. rzędu 1) na zbiorze K: istotnie, macierz ta *nie* jest maksymalnego rzędu tylko wtedy, gdy jest zerowa, tzn. $x = y = 0$; ale $(0,0)$ nie należy do zbioru K.

Zbiór K jest zwarty, a f jest ciągła. Zatem na mocy twierdzenia Weierstrassa f przyjmuje na K swoje kresy.

Wprowadźmy funkcję Lagrange'a:

$$g(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda F(x,y).$$

Obliczmy jej pochodne cząstkowe i przyrównajmy je do zera. Na mocy powyższego twierdzenia, wyznaczając (x,y), otrzymujemy punkty podejrzane o ekstremum.

$$y - 2\lambda x = 0,$$

$$x - 4\lambda y = 0,$$

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0.$$

Z dwóch pierwszych równań wynika, iż $y(1 - 8\lambda^2) = 0$. Zatem $y = 0$ bądź $\lambda = \pm 1/2\sqrt{2}$. Piersza możliwość jest wykluczona - daje bowiem $x = 0$ i sprzeczność z trzecim równaniem, a zatem ma miejsce druga możliwość, zatem $y = \pm 1/\sqrt{2}x$ i wstawiając to do trzeciego równania, otrzymujemy $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Tak więc mamy cztery punkty podejrzane o ekstremum:

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}),\ (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}),\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}).$$

Wartości funkcji f w tych punktach to $\pm 1/2\sqrt{2}$. To są więc odpowiednio maksimum i minimum f na K.

(ii) Tym razem wyznaczymy największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y, z) = x + y$ na zbiorze

$$K = \{(x, y, z) : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}.$$

Ponownie, f oraz $F(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 1$ są odpowiednio gładkie i macierz DF jest maksymalnego rzędu na K. Ponadto, K jest zwarty i f, jako ciągła, przyjmuje na nim swoje kresy.

Funkcja Lagrange'a jest postaci

$$g(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^4 + y^4 + z^4 - 1).$$

Wyznaczamy jej pochodne cząstkowe i przyr'ownujemy je do 0, otrzymując

$$1 - 4\lambda x^3 = 0, \qquad 1 - 4\lambda y^3 = 0, \qquad -4\lambda z^3 = 0$$

oraz

$$x^4 + y^4 + z^4 = 1.$$

Z pierwszych trzech równań wynika, że $z = 0$ oraz $x = y$. Podstawiając to do czwartego równania dostajemy $x = y = \pm 2^{-1/4}$. Dostajemy więc dwa punkty podejrzane o ekstremum: $(2^{-1/4}, 2^{-1/4}, 0)$ oraz $(-2^{-1/4}, -2^{-1/4}, 0)$. Wartości funkcji f w tych punktach to $2^{3/4}$ i $-2^{3/4}$, więc jest to, odpowiednio, maksimum oraz minimum funkcji f na zbiorze K.

(iii) Wyznaczymy największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y, z) = x + y$ na zbiorze

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1\}.$$

Ponownie, f oraz $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $F_2(x, y, z) = x + y + z - 1$ s'a dostatecznie regularne. Ponadto,

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest maksymalnego rzędu na K: istotnie, nie jest ona maksymalnego rzędu tylko gdy $x = y = 0$, a żaden punkt postaci $(0, 0, z)$ nie należy do K.

Piszemy funkcję Lagrange'a:

$$g(x, y, z, \lambda, \mu) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1) - \mu(x + y + z - 1),$$

liczymy jej pochodne cząstkowe i przyrównujemy do 0:

$$1 - 2\lambda x - \mu = 0,\ 1 - 2\lambda y - \mu = 0,\ -\mu = 0,$$

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x + y + z = 1.$$

Z pierwszych trzech równań wynika, iż $x = y$. Po uwzględnieniu dwóch ostatnich dostajemy $x = y = \pm 2^{-1/2}$ i $z = 1 - 2x$.

Mamy więc dwa punkty podejrzane: $(2^{-1/2}, 2^{-1/2}, 1 - 2^{1/2})$, $(-2^{-1/2}, -2^{-1/2}, 1 + 2^{1/2})$. Warto'sci funkcji f w tym punkcie wynoszą odpowiednio $2^{1/2}$ i $-2^{1/2}$. Jest więc to maksimum oraz minimum.

8 Całki

Całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania.

Definicja funkcji pierwotnej (całki nieoznaczonej)

Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją. Każdą funkcję $F : G \to \mathbb{R}$, dla której zachodzi równość $F'(x) = f(x)$ dla każdego x, nazywamy funkcją pierwotną bądź całką nieoznaczoną funkcji f. Oznaczenie: $F(x) = \int f(t)dt$.

Uwaga:

Funkcja pierwotna nie jest wyznaczona jednoznacznie. Jeśli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to dla dowolnej stałej C funkcja $F + C$ także jest funkcją pierwotną funkcji f.

Twierdzenie 8.1. *Jeśli $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest funkcją, a F_1, F_2 są jej funkcjami pierwotnymi, to istnieje $C \in \mathbb{R}$ takie, że $F_1 = F_2 + C$. Innymi słowy, funkcja $F_1 - F_2$ jest stała.*

Przykłady:

$$(i) \int 1dx = x + C,$$

$$(ii) \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C,\ a \neq -1,\ x > 0,$$

$$(iii) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0,$$

$$(iv) \int e^x dx = e^x + C,$$

$$(v) \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$(vi) \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$(vii) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg} x + C.$$

Twierdzenie 8.2 (o istnieniu funkcji pierwotnej funkcji ciągłej)**.** *Jeśli* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągła, to posiada funkcję pierwotną.*

Uwaga:

Może się zdarzyć, że funkcję pierwotne prostych funkcji ciągłych nie wyrażają się za pomocą funkcji elementarnych. Przykładem jest całka nieoznaczona $\int e^{-x^2}dx$. Często bardzo drobna zmiana w całkowanej funkcji prowadzi do problemu o zupełnie różnej trudności: np. $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$.

Twierdzenie 8.3 (o związku między całką a polem pod wykresem funkcji)**.** *Niech* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją nieujemną oraz* $F = \int f$*. Wówczas pole pod wykresem funkcji* f *na przedziale* $[a,b]$ *wynosi* $F(b) - F(a)$*.*

Definicja całki oznaczonej

Całką oznaczoną funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nazywamy liczbę $F(b) - F(a)$, gdzie $F = \int f$. Stosujemy oznaczenie

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

bądź

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b; \quad \text{czyli} \quad \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Całka oznaczona jest wynzaczona jednoznacznie!

Przykłady:

(i) $\int_a^b 1dx = b - a$.

(ii) $\int_a^b xdx = \frac{1}{2}x^2|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Twierdzenie 8.4 (o arytmetycznych własnościach całki)**.** *a) Załóżmy, że* f*,* g *mają funkcje pierwotne. Wtedy* $f \pm g$ *także mają funkcje pierwotne i mamy*

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

oraz

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

b) Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną, to dla dowolnej liczby rzeczywistej c funkcja cf ma funkcję pierwotną i

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \qquad\qquad \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 8.5 (o całkowaniu przez podstawienie)**.** *Załóżmy, że funkcje f, g' są ci'agłe, a F jest funkcją pierwotną funkcji f. Wówczas*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

oraz

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Oznaczenie: Zamiast $g'(x)dx$ będziemy pisać $dg(x)$; jeśli $y = g(x)$, to $dy = g'(x)dx$.
Przykłady:

$$(i)\int e^{2x}dx = \left|\begin{array}{c} y = 2x \\ dy = 2dx \end{array}\right| = \int e^y\frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}e^y + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

$$(ii)\int \mathrm{tg}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left|\begin{array}{c} y = \cos x \\ dy = -\sin x dx \end{array}\right| = -\int \frac{1}{y}dy = -\mathrm{ln}|y| + C = -\mathrm{ln}|\cos x| + C.$$

Twierdzenie 8.6 (o całkowaniu przez części)**.** *Załóżmy, że funkcje f i g mają ciągłe pochodne. Wówczas*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

oraz

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dxf(b)g(b) - f(a)g(a) - \int f(x)g'(x)dx.$$

$$(i)\int xe^x dx = |\text{części}| = \int x(e^x)'dx = xe^x - \int x'e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

$$(ii)\int \mathrm{ln}x dx = |\text{części}| = \int x'\mathrm{ln}x dx = x\mathrm{ln}x - \int x(\mathrm{ln}x)'dx = x\mathrm{ln}x - \int 1dx = x\mathrm{ln}x - x + C.$$

Definicja całki niewłaściwej Jeśli funkcja $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną i istnieje granica $\lim_{c\to b-}\int_a^c f(x)dx$, to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale $[a,b)$. Stosujemy to samo oznaczenie $\int_a^b f(x)dx$. Jeśli całka niewłaściwa istnieje i jest skończona, to mówimy, że całka jest zbieżna. Analogicznie dla lewgfo końca przedziału/ obu końców przedziału.

Przykład:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^t \right) = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t} + 1 \right) = 1.$$

Definicja:

Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna jeśli istnieje liczba M o następującej własności: dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $x_{k-1} \le t_k \le x_k$ oraz $x_k - x_{k-1} < \delta$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, to

$$\left| M - \left[f(t_1)(x_1 - x_0) + f(t_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) \right] \right| < \varepsilon.$$

Liczba M nazywana jest całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a, b]$ i jest oznaczana symbolem $\int_a^b f(x)dx$.

Twierdzenie 8.7. *(i) Jeśli istnieje całka oznaczona $\int_a^b f(x)dx$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna.*

(ii) Jeśli funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona oraz posiada skończenie wiele punktów nieciągłości, to jest całkowalna w sensie Riemanna.

8.1 Całkowanie funkcji wielu zmiennych

W zasadzie będziemy się zajmować tylko przypadkiem dwuwymiarowym. Załóżmy, że $D \subset \mathbb{R}^2$ jest pewnym zbiorem otwartym i spójnym. Przypuśćmy, że $f : \bar{D} \to \mathbb{R}$ jest nieujemną funkcją ciągłą i spróbujmy obliczyć objętość pod wykresem f = całkę $\int_D f(x, y)dxdy$.

(i) Na początek weźmy $D = [a, b] \times [c, d]$, prostokąt. Wówczas objęstość wynosi

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

(ii) Niech D będzie trójkątem o wierzchołkach w $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Wówczas

$$\int_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x f(x, y)dydx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y)dxdy.$$

(iii) Ogólnie, jeśli dla $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $D_{x_0} = D \cap \{x = x_0\}$ oraz $D^{y_0} = D \cap \{y = y_0\}$, to

$$\int_D f(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{D_x} f(x, y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{D^y} f(x, y)dxdy.$$

Jest to tzw. twierdzenie Fubiniego. Powyższe równości zachodzą dla znacznie szerszej klasy funkcji f, niekoniecznie ciągłych.

Przykłady:

(i) Pole koła o promieniu 1. Wynosi ono

$$2 \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx.$$

Zastosujmy podstawienie $x = \cos\phi$, $\phi \in [-\pi, 0]$, $dx = -\sin\phi d\phi$. Dostajemy

$$2 \cdot \int_{-\pi}^{0} (-\sin\phi) \cdot (-\sin\phi)d\phi = 2 \cdot \int_{-\pi}^{0} \sin^2\phi d\phi.$$

Całkujemy przez części.

$$= \int_{-\pi}^{0} -\sin\phi \cdot (\cos\phi)' d\phi = -\sin\phi\cos\phi|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} \cos^2\phi d\phi.$$

Stosując $\cos^2\phi = 1 - \sin^2\phi$, dostajemy

$$\int_{-\pi}^{0} \sin^2\phi d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) Objętość kuli.