

Topologia Algebraiczna I

Pomocnik studenta

Agnieszka Bojanowska

Stefan Jackowski

2 lutego 2011

1 Podstawowe pojęcia teorii kategorii

1.1 Kategorie, funktory, transformacje naturalne

Bedziemy używać następujących pojęć i przykładów dotyczących kategorii:

kategorie, obiekty, morfizmy, izomorfizmy

funktory,

transformacje naturalne funktorów,

funktory dołączone (sprzężone).

Kategorie oznaczamy naogół literami $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ a zbiory morfizmów między obiektami $X, Y \in \text{ob}(\mathcal{C})$ oznaczamy $\mathcal{C}(X, Y)$ lub $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Przez \mathcal{C}^{op} oznaczamy kategorię przeciwną do kategorii \mathcal{C} , czyli taką, że $\text{ob } \mathcal{C}^{op} = \text{ob}(\mathcal{C})$ a dla dowolnych $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}^{op}$ definiujemy $\mathcal{C}^{op}(A, B) := \mathcal{C}(B, A)$.

Przykłady:

\mathcal{S} – kategoria zbiorów i ich dowolnych przekształceń,

\mathcal{S}_* – kategoria zbiorów z wyróżnionym punktem i przekształceń zachowujących te punkty,

\mathcal{G} – kategoria grup i homomorfizmów; $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$ podkategoria grup abelowych,

\mathcal{R}_1 – kategoria pierścieni z 1 i homomorfizmów,

\mathcal{T} – kategoria przestrzeni topologicznych i przekształceń ciągłych,

\mathcal{T}_* – przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem i przekształceń ciągłych zachowujących te punkty,

\mathcal{T}_h – kategoria homotopii przestrzeni w której obiektami są przestrzenie topologiczne a morfizmami klasy homotopii. Istnieje naturalny funktor "ilorazowy" $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_h$,

\mathcal{T}_{h*} – kategoria homotopii przestrzeni z wyróżnionym punktem. Obiekty: przestrzenie z wyróżnionym punktem; morfizmy: punktowane klasy punktowanych homotopii odwzorowań. Istnieje naturalny funktor "ilorazowy" $\mathcal{T}_* \rightarrow \mathcal{T}_{h*}$.

Kategorię \mathcal{C} nazywamy *małą* jeśli klasa obiektów $\text{ob}(\mathcal{C})$ jest zbiorem. Zbiory częściowo uporządkowane i grupy (ogólniej monoidy łączne z jednością) można traktować jako przykłady małych kategorii a przekształcenia zachowujące porządek oraz homomorfizmy jako funktory między odpowiednimi kategoriami.

Definicja 1.1. Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ nazywamy równoważnością kategorii jeśli istnieje functor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ taki, że $G \circ F \simeq id_{\mathcal{C}}$ i $F \circ G \simeq id_{\mathcal{D}}$, gdzie \simeq oznacza naturalną równoważność functorów.

Wiele twierdzeń klasyfikacyjnych w matematyce jest w istocie stwierdzeniem, że pewne dwie kategorie są równoważne. To, czy dany functor jest równoważnością kategorii pomaga rozstrzygnąć następujące:

Zad. 1. Funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy

1. $F : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ jest bijekcją dla dowolnych $A, B \in \text{ob } \mathcal{C}$.
2. każdy obiekt $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$ jest izomorficzny z obiektem $F(A)$ dla pewnego $A \in \text{ob } \mathcal{C}$.

Przykład. Kategorie skończone wymiarowych przestrzeni wektorowych nad ciałem k jest równoważna swojej pełnej podkategorii złożonej z przestrzeni liniowych postaci k^n , $n \in \mathbb{N}$.

Zad. 2. Mała kategoria w której między dowolnymi dwoma obiektami jest co najwyżej jeden morfizm jest równoważna (ale nie identyczna!) z kategorią definiowaną przez poset (zbiór częściowo uporządkowany).

Zad. 3. Jeśli w małej kategorii każdy morfizm jest izomorfizmem oraz między każdymi dwoma obiektami istnieje morfizm, to ta kategoria jest równoważna kategorii definiowanej przez grupę. Podaj (nietrywialne) przykłady takich kategorii.

Zad. 4. Niech Cat oznacza kategorię, której obiektami są małe kategorie (tzn. takie, w których obiekty tworzą zbiór) a morfizmami funktory między nimi. Zauważyć, że kategoria grup i kategoria zbiorów częściowo uporządkowanych są równoważne pewnym podkategoriom w Cat .

1.2 Funktory reprezentowalne

Definicja 1.2. Dla $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ definiujemy funktory:

$$\begin{aligned} h_X : \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{S}, & h_X(U) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, U) \\ h^X : \mathcal{C}^{op} &\rightarrow \mathcal{S}, & h^X(U) &= \text{Mor}_{\mathcal{C}}(U, X) \end{aligned}$$

Definicja 1.3. Funktor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{S}$ nazywamy reprezentowalnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obiekt $X \in \mathcal{C}$ oraz izomorfizm functorów $h^X \rightarrow F$. Analogicznie dla funktora kowariantnego.

Twierdzenie 1.4 (Lemat Yonedy). *Niech $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ będzie funktorem. Wówczas przyporządkowanie $\Phi \rightsquigarrow \Phi(X)(id_X)$, gdzie $\Phi : h^X \rightarrow F$ jest naturalną transformacją, definiuje bijekcję zbioru transformacji naturalnych funktora h^X w functor F i zbioru $F(X)$.*

Wniosek 1.1. *Przyporządkowanie $f \rightsquigarrow \tau_f$, $\tau_f(h) = f \circ h$ definiuje bijekcję zbioru $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ w zbiór transformacji naturalnych funktora h^X w functor h^Y .*

Wniosek 1.2. *Jeżeli functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ jest reprezentowalny, to obiekt go reprezentujący jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.*

Zad. 5. Niech $\mathcal{S}^{C^{op}}$ oznacza kategorię, której obiektami są funktory z \mathcal{C}^{op} w \mathcal{S} , a morfizmami transformacje naturalne. Sprawdzić, że lemat Yonedy mówi, że przyporządkowanie $X \rightsquigarrow h^X$ definiuje functor, który jest równoważnością kategorii \mathcal{C} z pełną podkategorią $\mathcal{S}^{C^{op}}$ złożoną z functorów reprezentowalnych.

Analogiczne stwierdzenia są oczywiście prawdziwe dla functorów kowariantnych.

1.3 Funktory sprzężone

Definicja 1.5. Funktory $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ nazywamy sprzężonymi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje naturalna równoważność funktorów na kategorii $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}$ o wartościach w \mathcal{S}

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\cdot, G(\cdot)) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{D}}(F(\cdot), \cdot).$$

Mówimy, że functor F jest *lewo-sprzężony* do funktora G , a G jest *prawo-sprzężony* do funktora F .

Zad. 6. Pokazać, że functor sprzężony do danego funktora, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu funktorów.

Zad. 7. Skonstruować functor prawo-sprzężony do funktora $\text{Hom}(V, \cdot) : \mathcal{V}ect_k \rightarrow \mathcal{V}ect_k$.

Zad. 8. Pokazać, że jeżeli functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest równoważnością kategorii, to istnieje functor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ sprzężony do F zarówno z prawej jak i lewej strony.

1.4 Produkty i koprodukty, granice i kogranice

Definicja 1.6. Produktem (kartezjańskim) obiektów X i Y w kategorii \mathcal{C} nazywamy obiekt Z wraz z morfizmami $Z \xrightarrow{p_X} X$ i $Z \xrightarrow{p_Y} Y$, który ma następująca własność uniwersalności: dla dowolnych morfizmów $W \xrightarrow{f} X$ i $W \xrightarrow{g} Y$ istnieje dokładnie jeden morfizm $W \xrightarrow{h} Z$, dla którego $p_X \circ h = f$ i $p_Y \circ h = g$.

Definicja 1.7. Koproduktem obiektów X i Y w kategorii \mathcal{C} nazywamy obiekt S wraz z morfizmami $X \xrightarrow{i_X} S$ i $Y \xrightarrow{i_Y} S$, który ma następująca własność uniwersalności: dla dowolnych morfizmów $X \xrightarrow{f} W$ i $Y \xrightarrow{g} W$ istnieje dokładnie jeden morfizm $S \xrightarrow{h} W$, dla którego $h \circ i_X = f$ i $h \circ i_Y = g$.

Uwaga. Koproduktem obiektów X i Y w kategorii \mathcal{C} jest produktem w kategorii \mathcal{C}^{op} .

Zad. 9. Podać definicję produktu i koproduktu dowolnej rodziny obiektów $\{X_i\}_{i \in I}$

Zad. 10. Zbadać istnienie produktów i koproduktów (skończonych i nieskończonych) w znanych kategoriach.

Zad. 11. Dla obiektów X i Y kategorii \mathcal{C} rozpatrujemy functor $F(\cdot) = h^X(\cdot) \times h^Y(\cdot)$, gdzie \times oznacza produkt kartezjański zbiorów. Functor F jest reprezentowalny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje produkt $X \times Y$ i jest to obiekt go reprezentujący.

Z poprzednich rozważań wynika, że produkt, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu.

Definicja 1.8. Niech \mathcal{I} będzie małą kategorią. Diagramem w kategorii \mathcal{C} modelowanym na \mathcal{I} nazywamy dowolny functor $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$.

Ważne przykłady małych kategorii na których modelowane bywają diagramy (kropki oznaczają różne obiekty, nie zaznaczamy morfizmów idencycznościowych)

$$\bullet \rightrightarrows \bullet \qquad \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$



Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ będzie diagramem, zaś $W \in \text{ob } \mathcal{C}$. Powiemy, że rodzina morfizmów $\{f_j : W \rightarrow F(j)\}_{j \in I}$ jest zgodna jeżeli dla każdego $\alpha_{ij} : i \rightarrow j$ morfizmu w I , $F(\alpha_{ij}) \circ f_i = f_j$.

Definicja 1.9. *Granica* (lub granicą odwrotną) diagramu $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ nazywamy obiekt L w \mathcal{C} (oznaczamy go $\lim_{\mathcal{I}} F$) wraz ze zgodną rodziną morfizmów $p_j : L \rightarrow F(j)$, który posiada następującą własność uniwersalności: dla każdego obiektu W i zgodnej rodziny $\{f_j : W \rightarrow F(j)\}_{j \in I}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $g : W \rightarrow L$, dla którego $p_j \circ g = f_j$ dla każdego $j \in \text{ob } I$.

Jeżeli odwrócimy strzałki dostaniemy dualne pojęcie granicy prostej (zwanej też kogranicą) diagramu.

Definicja 1.10. *Kogranica* (lub granicą prostą) diagramu $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ nazywamy obiekt $C \in \mathcal{C}$ (oznaczamy go $\text{colim}_{\mathcal{I}} F$) wraz ze zgodną rodziną morfizmów $s_j : F(j) \rightarrow C$, który posiada następującą własność uniwersalności: dla każdego obiektu W i zgodnej rodziny $\{f_j : F(j) \rightarrow W\}_{j \in I}$ istnieje dokładnie jeden morfizm $g : C \rightarrow W$, dla którego $g \circ s_j = f_j$ dla każdego $j \in \text{ob } I$.

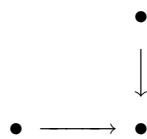
Zad. 12. Granica (odp. kogranica) diagramu modelowanego na kategorii dyskretnej (tzn. w której istnieją tylko morfizmy identycznościowe) jest izomorficzna z produktem (odp. koproduktem) rodziny obiektów.

Zad. 13. Granica i kogranica diagramu, o ile istnieje, to tylko jedna z dokładnością do izomorfizmu.

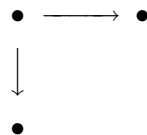
Zad. 14. Jeśli kategoria I ma obiekt początkowy $i_0 \in \text{ob } I$ (odpowiednio końcowy $i_\infty \in \text{ob } I$), to dla dowolnego diagramu $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ mamy $\lim_{\mathcal{I}} F = F(i_0)$ (odpowiednio $\text{colim}_{\mathcal{I}} F = F(i_\infty)$).

Zad. 15. Niech $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ będzie dowolnym diagramem. Udowodnij, że obiekt $C \in \text{ob } \mathcal{C}$ jest granicą odwrotną diagramu F wtedy i tylko wtedy, gdy reprezentuje functor $G_F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ dany wzorem $G_F(X) = \text{colim}_{\mathcal{C}} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, F(-))$ (colim w kategorii \mathcal{S}).

Definicja 1.11. Granicę diagramu w \mathcal{C} modelowanego na kategorii



nazywa się produktem włóknistym (inaczej *pull-back*), zaś kogranice diagramu modelowanego na kategorii



nazywa się koproduktem kowłóknistym (inaczej *push-out*).

Produkt włóknisty, o ile istnieje, to jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu. Oznaczamy go symbolem $X \times_T Y$ a koprodukt kowłóknisty odpowiednio $X \sqcup_S Y$.

Zad. 16. Sprawdź, że powyższa definicja produktu włóknistego jest równoważna następującej: Produktem włóknistym morfizmów $X \xrightarrow{f} T$ oraz $Y \xrightarrow{g} T$ nazywamy obiekt Z wraz z morfizmami $Z \xrightarrow{p_X} X$ i $Z \xrightarrow{p_Y} Y$, dla których przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{p_X} & X \\ p_Y \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

i który spełnia następujący warunek uniwersalności: dla każdego obiektu W i morfizmów $W \xrightarrow{h} X$ i $W \xrightarrow{k} Y$ takich, że $f \circ h = g \circ k$ istnieje dokładnie jeden morfizm $W \xrightarrow{r} Z$, taki że $p_X \circ r = f$ i $p_Y \circ r = g$.

Zad. 17. Zbadać istnienie granic i kogranic w znanych kategoriach.

Definicja 1.12. Granicę diagramu modelowanego na kategorii $0 \rightrightarrows 1$ (czyli dwóch morfizmów między tymi samymi obiektami) nazywamy ekwalizatorem tych morfizmów, a kogranicę ich koekwalizatorem.

Zad. 18. Jeśli w kategorii \mathcal{C} istnieją ekwalizatory dla dowolnej pary morfizmów oraz produkty dowolnej (skończonej) rodziny obiektów, to istnieją w niej granice (odwrotne) dowolnych (skończonych) diagramów. Analogicznie dla kogranic.

Zad. 19. Funktor dołączony z lewej (prawej) strony zachowuje kogranice (granice) diagramów. Tzn. jeśli functor $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ jest lewo dołączony do pewnego funktora, to dla dowolnego diagramu $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ to naturalny morfizm $\text{colim}_{\mathcal{C}}(G \circ F) \rightarrow G(\text{colim}_{\mathcal{C}} F)$ jest izomorfizmem.

1.5 Kategorie morfizmów

Dla dowolnej kategorii \mathcal{C} można rozważać kategorię jej morfizmów $\text{Mor}(\mathcal{C})$ której obiektami są morfizmy w \mathcal{C} a morfizmami między nimi przemiennie diagramy:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

Mówimy, że morfizm $f : X \rightarrow Y$ jest *ortogonalny z lewej strony* do $f' : X' \rightarrow Y'$ jeśli dla każdego morfizmu (diagramu) między nimi istnieje przekątna $X \rightarrow X'$. Odpowiednio mówimy, że f' jest ortogonalny do f z prawej strony. Jeśli $\mathcal{M} \subset \text{Mor}(\mathcal{C})$ jest klasą obiektów w $\text{Mor}(\mathcal{C})$ (tzn. morfizmów w \mathcal{C}), to klasę morfizmów do nich prostopadłych z prawej strony oznaczamy \mathcal{M}^\perp a z lewej strony ${}^\perp\mathcal{M}$.

Zauważmy, że w dowolnej kategorii \mathcal{C} można mówić o retraktach: powiemy, że obiekt c jest *retraktem* obiektu d jeśli istnieją morfizmy $c \rightarrow d \rightarrow c$ których złożenie jest identycznością id_c .

Lemat 1.1. Dla dowolnej klasy morfizmów \mathcal{M} klasy morfizmów ortogonalnych ${}^\perp\mathcal{M}$ i \mathcal{M}^\perp są zamknięte ze względu na retrakcje.

Dla ustalonego obiektu A możemy rozważać pełną podkategorię \mathcal{C}_A kategorii morfizmów, której obiektami są morfizmy o wartościach w A , a morfizmami diagramy w których dolna strzałka jest identycznością. Morfizmy możemy więc utożsamiać z trójkątami przemiennymi

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g & \swarrow h \\ & & A \end{array}$$

Dualnie rozważa się kategorię morfizmów wychodzących z A , oznaczaną \mathcal{C}^A , której obiektami są morfizmy $A \xrightarrow{f} X$ a morfizmami są także diagramy przemiennie:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Kategorię \mathcal{C}_A nazywa się kategorią obiektów *nad* A , a kategorię \mathcal{C}^A nazywa się kategorią obiektów *pod* A .

Zad. 20. Produkt włóknisty morfizmów $X \xrightarrow{f} T$ oraz $Y \xrightarrow{g} T$ w kategorii \mathcal{C} jest izomorficzny z ich produktem w kategorii \mathcal{C}_T . Odpowiednio koprodukt kowłóknisty morfizmów $S \xrightarrow{f} X$ oraz $S \xrightarrow{g} Y$ w kategorii \mathcal{C} jest izomorficzny z ich koproduktem w kategorii \mathcal{C}_S

Zad. 21. Zbadać istnienie produktów włóknistych i koproduktów kowłóknistych w znanych kategoriach.

Jeśli kategoria \mathcal{C} jest kategorią pewnych przestrzeni topologicznych, to w kategoriach \mathcal{C}_A i \mathcal{C}^A możemy w oczywisty sposób zdefiniować homotopie przekształceń. Morfizmy i homotopie w \mathcal{C}_A nazywamy *przekształceniami (homotopiami) rel(A)*, natomiast morfizmy i homotopie w \mathcal{C}^A nazywamy *przekształceniami (homotopiami) nad A* lub *włóknistymi*.

1.6 Struktury algebraiczne w kategoriach

Pokażemy, że o strukturach algebraicznych takich jak monoid i grupa można mówić w dowolnej kategorii. Niech \mathcal{M} oznacza kategorię łącznych monoidów z jednością, a \mathcal{G} kategorie grup (grupa to monoid posiadający odwrotności). Istnieją oczywiste funktory zapominania $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{Z} \mathcal{S}$.

Definicja 1.13. Strukturą monoidu (odp. komonoidu) na obiekcie $X \in \text{ob } \mathcal{C}$ nazywamy podniesienie funktora $h^X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ (odp. h_X) do kategorii monoidów. Oznacza to, że istnieje funktor $\tilde{h}^X : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{M}$ taki, że diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\tilde{h}^X} & \mathcal{M} \\ h^X \searrow & & \swarrow Z \\ & \mathcal{S} & \end{array}$$

jest przemienny. Jeśli zastąpić kategorię \mathcal{M} kategorią \mathcal{G} , to mówimy o strukturze grupowej (odp. kogrupowej) na obiekcie X .

Zad. 22. Załóżmy, że na obiektach $X, Y \in \mathcal{C}$ zadane są struktury monoidu. Kiedy morfizm $f : X \rightarrow Y$ nazwiemy homomorfizmem tych struktur?

Zad. 23. Zbadać związek definicji grupy (topologicznej) z pojęciem obiektu grupowego w kategorii zbiorów (przestrzeni topologicznych) i kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem (przestrzeni z wyróżnionym punktem). Zbadać istnienie struktur ko-monoidu w tych kategoriach.

Jeśli w kategorii istnieją produkty oraz obiekt końcowy, to definicję struktury grupowej na X można wyrazić równoważnie w postaci bliższej tradycyjnej definicji grupy.

Zad. 24. Zakładamy, że w kategorii \mathcal{C} istnieją produkty dowolnych obiektów oraz obiekt początkowy P . Pokazać, że struktury grupowe na X są w bijekcji z trójkami morfizmów w \mathcal{C} :

$\mu : X \times X \rightarrow X$ (działanie grupowe),

$^{-1} : X \rightarrow X$ (branie elementu odwrotnego),

$e : P \rightarrow X$ (jedynka), które spełniają odpowiednie warunki (te warunki proszę wypisać samodzielnie - to nic innego jak aksjomaty grupy napisane przy pomocy przemiennej diagramów). Wykazać analogiczne stwierdzenie dla obiektów kogrupowych.

Zad. 25. Jeżeli morfizmy $\nu : X \rightarrow X$ i $\mu : Y \times Y \rightarrow Y$ zadaje strukturę kogrupową, zaś $\mu : Y \times Y \rightarrow Y$ zadaje strukturę grupową w kategorii \mathcal{C} i te dwie struktury mają wspólny element neutralny, to struktury grupy wyznaczone na zbiorze $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ przez ν i przez μ pokrywają się i ponadto otrzymana grupa jest przemienna.

2 Wprowadzanie topologii w zbiorach. Przestrzenie odwzorowań ciągłych.

2.1 Podbazy topologii, topologia indukowana przez rodzinę podzbiorów

Definicja 2.1. Niech X będzie zbiorem a \mathcal{U} pewną rodziną jego podzbiorów. Topologią *indukowaną* (generowaną) przez \mathcal{U} nazywamy najmniejszą topologię w X zawierającą rodzinę \mathcal{U} . Oznaczamy ją $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Zad. 26. Niech X, \mathcal{U} będą jak wyżej. Pokaż, że bazą topologii $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ jest rodzina wszystkich skończonych przecięć zbiorów z rodziny \mathcal{U} (czyli \mathcal{U} jest podbazą topologii $\mathcal{T}(\mathcal{U})$). *Uwaga:* przecięcie pustej rodziny podzbiorów X to X .

Zad. 27. Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi, przy czym topologia na Y jest indukowana przez rodzinę \mathcal{U} . Udowodnij, że $f : X \rightarrow Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $U \in \mathcal{U}$ zbiór $f^{-1}(U)$ jest otwarty w X . *Uwaga:* wynika stąd, że gdy na Y jest dana topologia indukowana, nie musimy rozpatrywać przeciwobrazów *wszystkich* zbiorów otwartych sprawdzając ciągłość przekształcenia.

2.2 Topologia wprowadzana przez rodzinę odwzorowań

Zacniemy od opisanego ogólnej konstrukcji wprowadzania topologii w zbiorze na którym określone są przekształcenia o wartościach w przestrzeniach topologicznych.

Niech X będzie zbiorem a $\mathcal{F} = \{f_i : X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$ rodziną przekształceń o wartościach w przestrzeniach topologicznych (Y_i, \mathcal{T}_i) . Definiujemy topologię $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ w zbiorze X jako najmniejszą

topologię w której wszystkie odwzorowania $f_i : X \rightarrow Y_i$ są ciągłe. Łatwo zauważyć, że bazą tej topologii są zbiory postaci $\{f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})\}$ gdzie $U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Następujące twierdzenie charakteryzuje topologię $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Stwierdzenie 2.1. *Niech Z będzie przestrzenią topologiczną. Odwzorowanie $g : Z \rightarrow X$ jest ciągle wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $i \in I$ złożenie $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f_i} Y_i$ jest ciągle.*

Przykład. Jeśli $A \subset X$ jest podzbiorem przestrzeni topologicznej, to topologia podprzestrzeni w A jest zadana przez odwzorowanie zanurzenia $i : A \subset X$.

Przykład. Jeżeli $\{X_i\}_{i \in I}$ jest rodziną przestrzeni topologicznych, to topologia w produkcie $\prod_{i \in I} X_i$ jest zadana przez rodzinę rzutowań $\{p_i : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_i\}_{i \in I}$.

Podobnie możemy zdefiniować topologię w zbiorze Y jeśli zadana jest rodzina odwzorowań $\mathcal{F} := \{f_j : X_j \rightarrow Y\}_{j \in J}$ z przestrzeni topologicznych (X_j, \mathcal{T}_j) do Y . Topologię $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ definiujemy jako największą topologię w Y taką, że wszystkie odwzorowania $f_j : X_j \rightarrow Y$ są ciągłe. Łatwo widzieć, że $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \{U \subseteq Y : \forall j \in J f_j^{-1}(U) \in \mathcal{T}_j\}$. Podobnie jak powyżej, topologia ta jest scharakteryzowana przez następującą własność.

Stwierdzenie 2.2. *Niech Z będzie przestrzenią topologiczną. Odwzorowanie $g : Y \rightarrow Z$ jest ciągle wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $j \in J$ złożenie $X_j \xrightarrow{i_j} Y \xrightarrow{g} Z$ jest ciągle.*

Definicja 2.2. Niech $\{X_j\}_{j \in J}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych. Zdefiniujmy zbiór $X = \prod_{j \in J} X_j := \bigcup_{j \in J} X_j \times \{j\}$ Dla dowolnego $j \in J$ mamy zanurzenie $i_j : X_j \subset X$. Zbiór X z topologią zadaną przez rodzinę odwzorowań $\{i_j\}_{j \in J}$ nazywamy *sumą rozłączną* (lub koproduktem) przestrzeni topologicznych $\{X_j\}$.

Zauważmy, że jeśli $\forall j \in J X_j = X$ to $\prod_{j \in I} X_j = X \times J$ gdzie w zbiorze wskaźników J rozpatrujemy topologię dyskretną.

2.3 Topologia ilorazowa

Bardzo ważnym szczególnym przypadkiem rozważanej wyżej konstrukcji jest wprowadzanie topologii w zbiorze klas abstrakcji relacji równoważności. Zauważmy, że jest to konstrukcja w pewnym sensie dwoista do definicji podprzestrzeni.

Definicja 2.3. Niech (X, \mathcal{T}) będzie przestrzenią topologiczną, R relacją równoważności w zbiorze X , a $q : X \rightarrow X/R$ przekształceniem przypisującym punktowi jego klasę abstrakcji. W zbiorze X/R definiujemy topologię wprowadzoną przez przekształcenie q , którą nazywamy topologią ilorazową, a przestrzeń X/R przestrzenią ilorazową.

$$\mathcal{T}/R := \{U \subset X/R : q^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}.$$

Definicja 2.4. Przekształcenie ciągle $q : X \rightarrow Y$ będące surjekcją nazywamy ilorazowym, jeżeli dla dowolnego przekształcenia $f : Y \rightarrow Z$ z ciągłości złożenia $f \circ q : X \rightarrow Z$ wynika ciągłość przekształcenia f . \square

Zad. 28. Jeśli surjekcja $f : X \rightarrow Y$ jest przekształceniem otwartym lub domkniętym, to jest przekształceniem ilorazowym. *Uwaga.* Nie każde przekształcenie ilorazowe musi być otwarte lub domknięte.

Zad. 29. Rozpatrzmy ciągłą surjekcję $f: X \rightarrow Y$ i relację R_f na X określoną następująco $xR_fx' \iff f(x) = f(x')$. Udowodnij, że

- a) f jest przekształceniem ilorazowym wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $f': X/R_f \rightarrow Y$ dane wzorem $f'([x]) = f(x)$ jest homeomorfizmem;
 b) jeśli Y jest przestrzenią Hausdorffa, to również X/R_f jest przestrzenią Hausdorffa.

Przykład 1. Jeżeli $A \subset X$, to przez X/A oznaczamy wyposażoną w topologię ilorazową przestrzeń klas abstrakcji relacji $xR_x' \iff x = x'$ lub $x, x' \in A$. Mówimy, że jest to przestrzeń X z podzbiorem A zgniecionym do punktu.

Przykład 2. Jeżeli A jest przestrzenią topologiczną, to (niezredukowanym) *stożkiem* nad A nazywamy $A \times I/A \times \{1\}$, gdzie I oznacza odcinek $[0, 1]$ z topologią euklidesową.

Przykład 3. Niech (X_i, x_i) , $i \in I$ będą przestrzeniami topologicznymi, z wyróżnionymi punktami. Niech $X := \coprod_{i \in I} X_i$ będzie koproduktem zaś $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \times \{i\} \subseteq X$. Wówczas X/A nazywamy *bukietem* przestrzeni X_i oznaczamy $\bigvee_{i \in I} X_i$. Bukiet skończonej liczby przestrzeni oznaczamy także $X_1 \vee X_2 \dots \vee X_n$.

Zad. 30. Zauważyc, że przestrzeń $X \vee Y$ jest homeomorficzna z podzbiorem $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$. Czy taki homeomorfizm zachodzi też dla nieskończonych bukietów?

Kolejny przykład jest tak ważny, że wyodrębnimy go jako definicję.

Definicja 2.5. Niech $A \subseteq X$ i niech $f: A \rightarrow Y$ będzie przekształceniem ciągłym. Wówczas doklejeniem przestrzeni X do Y wzdłuż przekształcenia A nazywamy przestrzeń ilorazową $(X \sqcup Y)/R$, gdzie $xRy \iff x = y$ lub $x \in A$ i $f(x) = y$ i oznaczamy ją symbolem $X \cup_f Y$. Mamy następujący przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{i'} & X \cup_f Y \end{array},$$

w którym i oraz i' są włożeniami.

Zauważmy, że przestrzeń X z podzbiorem A zgniecionym do punktu jest szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji – jeżeli $Y = \{*\}$ jest przestrzenią jednopunktową, to przestrzeń $X \cup_f \{*\}$ jest homeomorficzna z X/A .

Zad. 31. Torus i butelka Kleina powstają z bukietu dwóch okręgów przez doklejenie dysku 2-wymiarowego wzdłuż jego brzegu. Dowolny precel powstaje z bukietu okręgów przez doklejenie dysku 2-wymiarowego wzdłuż jego brzegu.

Zad. 32. Produkt kartezjański dwóch sfer $S^m \times S^n$ powstaje z bukietu $S^m \vee S^n$ przez doklejenie dysku D^{n+m} wzdłuż jego brzegu.

Przestrzeń ilorazowa przestrzeni spójnej (łukowo spójnej) jest oczywiście spójna (łukowo spójna), gdyż jest jej obrazem przy przekształceniu ciągłym. Jednak wiele innych własności topologii przestrzeni nie zachowuje się przy przechodzeniu do przestrzeni ilorazowej. Nie są zachowywane aksjomaty oddzielania, istnienia przeliczalnej bazy, czy też przeliczalnej bazy w punkcie. przestrzeń ilorazowa przestrzeni metrycznej może nie być metryzowalna.

Zad. 33. Niech $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem liczb całkowitych. Przestrzeń \mathbb{R}/\mathbb{Z} (*Uwaga:* \mathbb{R}/\mathbb{Z} to liczby rzeczywiste ze zgniecionym do punktu zbiorem \mathbb{Z} , a nie grupa ilorazową!), która jest homeomorficzna z bukietem przeliczalnej liczby okręgów, nie ma przeliczalnej bazy w punkcie bukietowym.

2.4 Uzwanie Aleksandrowa przestrzeni lokalnie zwartej

Definicje p. [Uzwanie Aleksandrowa](#). Uzwanie Aleksandrowa¹ przestrzeni X oznaczamy X^+ . Istnieje kanoniczne włożenie $X \subset X^+$.

Zad. 34. Sfera S^n jest homeomorficzna z uzwaniem Aleksandrowa przestrzeni \mathbb{R}^n .

Zad. 35. Płaszczyzna rzutowa $\mathbb{R}P(2)$ jest homeomorficzna z uzwaniem Aleksandrowa otwartej wstęgi Moebiusa.

Zad. 36. Dla przestrzeni lokalnie zwartych X, Y istnieje naturalny homeomorfizm $(X \times Y)^+ \simeq X^+ \wedge Y^+$ będący identycznością na $X \times Y$. Wynika stąd, że $S^n \wedge S^m \simeq S^{n+m}$.

2.5 Przestrzenie zwarcie generowane

Niech dana będzie przestrzeń topologiczna (X, \mathcal{T}) i rozważmy rodzinę jej podzbiorów zwartych $\{K\}$. Zapomniawszy o wyjściowej topologii w X , a pamiętając o topologii w podzbiórach zwartych można wprowadzić w zbiorze X nową topologię przez rodzinę włożeń zbiorów zwartych: $\{K \subset X \mid K \text{ – zwarty}\}$. Otrzymana przestrzeń topologiczna oznaczamy $(kX, k\mathcal{T})$, lub w skrócie kX . Identyfikacja $id : kX \rightarrow X$ jest oczywiście przekształceniem ciągłym; jeśli jest homeomorfizmem, to X nazywamy *przestrzenią zwarcie generowaną* lub krótko *k-przestrzenią*.

Zad. 37. Przestrzeń lokalnie zwarta jest k -przestrzenią.

Zad. 38. Przestrzeń metryczna jest k -przestrzenią.

Zad. 39. Przestrzeń Hausdorffa jest zwarcie generowana wtedy i tylko wtedy gdy jest przestrzenią ilorazową przestrzeni lokalnie zwartej, w szczególności przestrzeń ilorazowa k -przestrzeni jeśli jest Hausdorffa jest k -przestrzenią.

Uwaga. Zainteresowanym polecam notatki: Neil Strickland [The category of CGWH spaces](#), w których rozpatrywane są *compactly generated weakly Hausdorff spaces*, co pozwala uwolnić się od zakładania własności Hausdorffa i nadać wielu twierdzeniom dot. k -przestrzeni bardziej elegancką formę (w szczególności dot. przestrzeni odwzorowań - p.niżej).

2.6 Topologia zwarto-otwarta w przestrzeni odwzorowań ciągłych

Definicja 2.6. Dla przestrzeni topologicznych X, Y przez $\text{Map}(X, Y)$ oznaczamy zbiór przekształceń ciągłych $X \rightarrow Y$ wyposażony w topologię zwarto-otwartą tzn. generowaną przez zbiory postaci $\{(A, W) \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \subset Y \text{ otwarty}\}$, gdzie $(A, W) := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f(A) \subset W\}$.

Zad. 40. a) Niech $\mathcal{B} = \{W_\alpha\}$ będzie podbazą przestrzeni Y (w szczególności bazą lub nawet całą topologią!). Wtedy rodzina $\{(A, W) \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \in \mathcal{B}\}$ jest podbazą topologii zwarto-otwartej na $\text{Map}(X, Y)$.

b) Niech $\mathcal{F} = \{C_\alpha\}$ będzie rodziną zwartych zbiorów w X z następującą własnością: dla każdego zwartego A i otwartego $U \supset A$ istnieje skończenie wiele $C_i \in \mathcal{F}$ spełniających $A \subset \bigcup_1^n C_i \subset U$.

¹Paweł S. Aleksandrow (1896 – 1982)

Wtedy rodzina $\{(C, W) \mid C \in \mathcal{F}, W \in \mathcal{B}\}$ jest również podbazą topologii zwarto-otwartej w $\text{Map}(X, Y)$.

Zad. 41. Zbiory $(A \times B, W)$ gdzie $A \subset X$, $B \subset Y$ są zwarte a $W \subset Z$ otwarty są podbazą topologii zwarto-otwartej w $\text{Map}(X \times Y, Z)$.

Zad. 42. Jeśli $f : X \rightarrow X'$ oraz $g : Y \rightarrow Y'$ są odwzorowaniami ciągłymi, to odwzorowania indukowane $f^* : \text{Map}(X', Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y)$ oraz $g_* : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(X, Y')$ są ciągłe w topologii zwarto-otwartej.

Definicja 2.7. Dla dowolnego przekształcenia $h : X \times Y \rightarrow Z$ definiujemy $\hat{h} : X \rightarrow \text{Map}(Y, Z)$ wzorem $\hat{h}(x)(y) := h(x, y)$.

Twierdzenie 2.8. Jeśli Y jest lokalnie zwarta, to przekształcenie

$$\text{Map}(X \times Y, Z) \rightarrow \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$$

zdefiniowane jako $f \mapsto \hat{f}$ jest bijekcją (a nawet homeomorfizmem).

Uwaga. Założenie lokalnej zwartości można osłabić rozważając wspomniane wyżej *przestrzenie zwarcie generowane* lub nawet *compactly generated weakly Hausdorff spaces*. Kategoria takich przestrzeni nieco różni się od kategorii wszystkich przestrzeni (np. topologia w produkcie i w przestrzeni odwzorowań musi być zdefiniowana nieco inaczej), ale jest bardzo wygodna na użytek abstrakcyjnej teorii homotopii. Zobacz: Neil Strickland [Compactly generated spaces](#).

2.7 Przestrzenie odwzorowań i przekształcenia ilorazowe

Zad. 43. Jeśli $q : X \rightarrow Y$ jest przekształceniem ilorazowym a Z przestrzenią lokalnie zwartą, to przekształcenie $q \times id : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ też jest ilorazowe.

Zad. 44. Niech \mathbb{Q} i \mathbb{Z} będą odpowiednio zbiorami liczb wymiernych i całkowitych z topologią odziedziczoną z przestrzeni euklidesowej \mathbb{R} . Rozważamy przekształcenie ilorazowe $p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (\mathbb{Q}/\mathbb{Z} to przestrzeń liczb wymiernych z utożsamionym do punktu zbiorem \mathbb{Z} a nie grupa ilorazowa!). Pokaż, że $id \times p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nie jest przekształceniem ilorazowym.

2.8 Odwzorowania przestrzeni z wyróżnionym punktem

Definicja 2.9. Dla przestrzeni punktowanych (X, x_0) i (Y, y_0) oznaczamy $\text{Map}_*(X, Y) := \{f \in \text{Map}(X, Y) \mid f(x_0) = y_0\}$ oraz $X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y$. Przestrzeń $X \wedge Y$ nazywamy *smash produktem* (X, x_0) i (Y, y_0)

Zad. 45. Z bijekcji zbiorów $\text{Map}(X \times Y, Z) \cong \text{Map}(X, \text{Map}(Y, Z))$ wywnioskuj bijekcję zbiorów morfizmów w kategorii punktowanej $\text{Map}_*(X \wedge Y, Z) \cong \text{Map}_*(X, \text{Map}_*(Y, Z))$. Udowodnij, że jeśli X, Y są zwarte to odwzorowanie to jest homeomorfizmem.

Zad. 46. W przypadku $Y = S^1$ dostajemy bijekcję $\text{Map}_*(\Sigma X, Z) \cong \text{Map}_*(X, \Omega Y)$, gdzie ΣY oznacza zredukowane zawieszenie a ΩY przestrzeń pętli na Y zaczynających się w punkcie bazowym. Udowodnij, że dla dowolnych przestrzeni X, Z istnieje bijekcja zbiorów klas homotopii przekształceń $[\Sigma X, Z]_* \cong [X, \Omega Z]_*$.

3 Rozwłóknienia i korozwłóknienia

3.1 Walce i ko-walce

Definicja 3.1. Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

- *Walcem (lub cylindrem) o podstawie X* nazywamy włożenie $X \xrightarrow{i_0} X \times I$.
- *Kowalcem (lub kocylindrem) nad X* nazywamy projekcję $P(X) \xrightarrow{p_0} X$ gdzie $P(X) := X^I = \text{Map}(I, X)$ oraz $p_0(\omega) := \omega(0)$.

Konstrukcje walca i kowalca są do siebie dualne, co znajduje wyraz w bijekcji (a nawet homeomorfizmie) $\text{Map}(X \times I, Y) \simeq \text{Map}(X, P(Y))$.

Definicja 3.2. *Walcem (lub cylindrem) przekształcenia $f : X \rightarrow Y$* nazywa się przestrzeń $Z(f)$ z włożeniem $i_0 : Y \hookrightarrow Z(f)$ zdefiniowanym jako push-out diagramu:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & & \downarrow i_0 \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(f) \end{array}$$

Definicja 3.3. *Kowalcem (lub kocylindrem) przekształcenia f* , nazywa się przestrzeń $P(f)$ wraz z projekcją $p_0 : P(f) \rightarrow X$ zdefiniowane jako pull-back diagramu :

$$\begin{array}{ccc} P(f) & \xrightarrow{\tilde{f}} & P(Y) \\ p_0 \downarrow & & \downarrow p_0 \\ X & \xrightarrow{\bar{f}} & Y \end{array}$$

Zad. 47. Wypisać *explicite* definicje walca i kowalca przekształcenia f .

Konstrukcje walca i kowalca przekształcenia są funktorialne ze względu na morfizmy przekształceń. Dowolny diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \longrightarrow & Y' \end{array}$$

indukuje odwzorowania $Z(f) \rightarrow Z(f')$ oraz $P(f) \rightarrow P(f')$ dla których odpowiednie diagramy są przemienne.

3.2 Retrakcje

Pojęcie retrakcji można zdefiniować w dowolnej kategorii \mathcal{C} . *Retrakcją* morfizmu $A \xrightarrow{f} X$ nazwiemy morfizm $X \xrightarrow{r} A$ taki, że złożenie $A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{r} A$ jest identycznością.

Zad. 48. Jeśli morfizm w kategorii przestrzeni topologicznych $f : A \rightarrow X$ posiada retrakcję, to f jest zanurzeniem homeomorficznym A w X . Jeśli X jest przestrzenią Hausdorffa, to podzbiór $f(A) \subset X$ jest domknięty.

W dalszym ciągu ograniczamy się więc do włożeń podzbiorów.

Definicja 3.4. Niech $A \subseteq X$ będzie podprzestrzenią przestrzeni X a $i_A : A \hookrightarrow X$ oznacza włożenie.

1. Przekształcenie $r : X \rightarrow A$ nazywa się *retrakcją X na A* , jeżeli $r \circ i_A = id_A$. Podzbiór A nazywa się *retraktem X*
2. Retrakcja $r : X \rightarrow A$ nazywa się *retrakcją deformacyjną*, jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X ; podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się wtedy *retraktem deformacyjnym X* .
3. Retrakcja $r : X \rightarrow A$ nazywa się *silną retrakcją deformacyjną*, jeżeli złożenie $i_A \circ r$ jest homotopijne z id_X względem A ; podzbiór $A \subseteq X$ nazywa się wtedy *silnym retraktem deformacyjnym X* .

3.3 Korozwłóknienia i rozwłóknienia

W kategorii \mathcal{T} wyróżniamy dwie ważne klasy przekształceń: rozwłóknienia i korozwłóknienia. Opisane wyżej konstrukcje walca i kowalca przekształcenia pozwalają rozłożyć dowolne przekształcenie na superpozycję korozwłóknienia i homotopijnej równoważności oraz homotopijnej równoważności i rozwłóknienia. Rozwłóknienia i korozwłóknienia odgrywają ogromną rolę w badaniu homotopijnych własności przestrzeni topologicznych.

Twierdzenie 3.5. Dla przekształcenia $j : A \rightarrow X$ następujące warunki są równoważne.

1. Dla dowolnego przemiennego kwadratowego diagramu odwzorowań ciągłych istnieje przekątna:

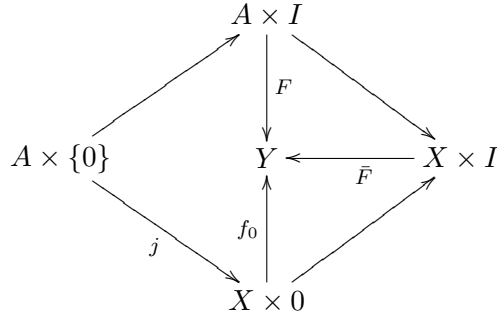
$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{F} & P(Y) \\
 j \downarrow & \nearrow \bar{F} & \downarrow p_0 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

2. Odwzorowanie $\bar{j} : Z(j) \rightarrow Z(id) = X \times I$ indukowane przez morfizm:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{j} & X \\
 j \downarrow & & \downarrow id \\
 X & \xrightarrow{id} & X
 \end{array}$$

posiada lewą odwrotność $r : X \times I \rightarrow Z(j)$, czyli $Z(j)$ jest retraktem walca $X \times I$ - r nazywa się funkcją retrahującą korozwłóknienia j ;

3. $j : A \rightarrow X$ ma własność rozszerzania homotopii (HEP²) tzn. dla dowolnego warunku początkowego $f_0 : X \rightarrow Y$ i homotopii $F : A \times I \rightarrow Y$ do $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$, spełniającej warunek $f_0(i(a)) = F(a, 0)$ dla $a \in A$ istnieje rozszerzenie $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$.



Definicja 3.6. Przekształcenie $j : A \rightarrow X$ spełniające jeden z warunków poprzedniego stwierdzenia nazywa się *korozwłóknieniem*. Korozwłóknienia takie, że $j(A) \subset X$ jest podzbiorem domkniętym nazywamy domkniętymi korozwłóknieniami lub *parami Borsuka*³.

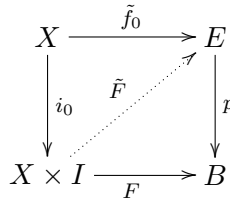
Zad. 49. Jeśli $j : A \rightarrow X$ jest korozwłóknieniem, to $j : A \rightarrow j(A)$ jest homeomorfizmem na obraz (a więc j jest różnowartościowe). Jeśli X jest przestrzenią Hausdorffa to $j(A) \subset X$ jest domknięty.

Zad. 50. Włożenie podzbioru domkniętego $A \hookrightarrow X$ jest korozwłóknieniem wtedy i tylko wtedy gdy $X \times \{0\} \cup A \times I$ jest retraktem $X \times I$.

Zad. 51. Włożenie $S^{n-1} \subset D^n$ jest korozwłóknieniem.

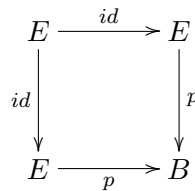
Twierdzenie 3.7. Dla przekształcenia $p : E \rightarrow B$ następujące warunki są równoważne.

1. p ma własność podnoszenia homotopii (HLP⁴) tzn. dla dowolnego przemiennego diagramu ciągłych strzałek:



istnieje strzałka przerywana (podniesienie) \tilde{F} .

2. Odwzorowania $\bar{p} : P(E) \rightarrow P(p)$ indukowane przez diagram:



ma prawą odwrotność tzn. $s : P(p) \rightarrow P(E)$ takie, że $\bar{p} \circ s = id_{P(p)}$ - odwzorowanie s nazywa się funkcją podnoszącą drogi rozwłóknienia p ;

²Homotopy Extension Property

³Karol Borsuk (Warszawa 1905 – 1982 Warszawa)

⁴Homotopy Lifting Property

3. Dla diagramu

$$\begin{array}{ccc} P(E) & \xrightarrow{p_0} & E \\ \bar{p} \downarrow & & \downarrow p \\ P(B) & \xrightarrow{p_0} & B \end{array}$$

w którym $\bar{p}(\omega) = p \circ \omega$ i przekształceń $F : X \rightarrow P(B)$ oraz $f : X \rightarrow E$ czyniących odpowiednie diagramy przemiennymi, istnieje odwzorowanie $\tilde{F} : X \rightarrow P(E)$ dla którego odpowiednie diagramy są przemiennie.

Definicja 3.8. Przekształcenie $p : E \rightarrow B$ spełniające jeden z warunków poprzedniego stwierdzenia nazywa się rozwłóknieniem Hurewicza,⁵ lub krótko *rozwłóknieniem*.

Zauważmy, że warunki nr 2 w definicjach korozwłóknienia i rozwłóknienia są "wewnętrzne" tzn nie odwołują się do innych przestrzeni i odwzorowań.

Zad. 52. Jeśli $p : E \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem, to $p(E)$ jest sumą pewnych składowych łukowej spójności B .

Zad. 53. Dla dowolnych przestrzeni projekcja $B \times F \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem a włożenie $X \subset X \amalg Y$ jest korozwłóknieniem.

Stwierdzenie 3.1. Następujące konstrukcje zachowują klasy (ko-)rozwłóknień:

1. Przekształcenie izomorficzne w kategorii $\text{Mor}(\mathcal{T})$ z (ko-)rozwłóknieniem jest (ko-)rozwłóknieniem;
2. Złożenie (ko-)rozwłóknień jest (ko-)rozwłóknieniem;
3. Pull-back (push-out) rozwłóknienia (ko-rozwłóknienia) jest rozwłóknieniem (ko-rozwłóknieniem);
4. Retrakt (ko-)rozwłóknienia w kategorii $\text{Mor}(\mathcal{T})$ jest (ko-)rozwłóknieniem;
5. Koproduct i produkt (ko-)rozwłóknień jest (ko-)rozwłóknieniem.

Zad. 54. Udowodnij ostatnie stwierdzenie, używając do poszczególnych tez najodpowiedniejszego z równoważnych warunków definiujących (ko-)rozwłóknienie.

Następne twierdzenie powiada, że każde przekształcenie można z homotopijnego punktu widzenia zamienić zarówno na rozwłóknienie jak i korozwłóknienie.

Twierdzenie 3.9. Dla dowolnego przekształcenia $f : X \rightarrow Y$ istnieje przemienny diagram, functorialnie zależący od przekształcenia f (tzn. morfizm przekształceń indukuje morfizm diagramów):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s_0} & P(f) \\ \downarrow i_f & \searrow f & \downarrow p_f \\ Z(f) & \xrightarrow{r_0} & Y \end{array}$$

w którym: $i_f(x) := [x, 1]$, $r_0[x, t] := f(x)$, $r_0(y) := y$, $s_0(x) := \omega_{f(x)}$, $p_f(x, \omega) := \omega(1)$. Odwzorowania s_0 i r_0 są homotopijnymi równoważnościami; i_f jest korozwłóknieniem, a p_f jest rozwłóknieniem.

⁵Witold Hurewicz (Łódź 1904 – 1956 Uxmal, Mexico)

Dowód. Wykażemy, że przekształcenie i_f jest korozwłóknieniem. Ponieważ $\partial I \subset I$ jest korozwłóknieniem, więc $X \times \partial I \subset X \times I$ jest korozwłóknieniem. Mamy push-out diagram, w którym utożsamiamy $X \times \partial I = X \amalg X$

$$\begin{array}{ccc} X \times \partial I & \xrightarrow{f \amalg id} & Y \amalg X \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i}_f \\ X \times I & \xrightarrow{\bar{f}} & Z(f) \end{array}$$

Przekształcenie i_f jest złożeniem $X \hookrightarrow Y \amalg X \rightarrow Z(f)$.

Dualnie, dowiedzimy że p_f jest rozwłóknieniem: Ponieważ $\partial I \subset I$ jest korozwłóknieniem, więc na mocy twierdzenia Borsuka odwzorowanie $P(Y) = \text{Map}(I, Y) \rightarrow \text{Map}(\partial I, Y) = Y \times Y$ jest rozwłóknieniem. Rozpatrzmy pull-back diagram:

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\widetilde{f \times id}} & P(Y) \\ \downarrow \bar{p}_{0,1} & & \downarrow p_{0,1} \\ X \times Y & \xrightarrow{f \times id} & Y \times Y \end{array}$$

i zauważmy, że $W = \{(x, y, \omega) \mid \omega(0) = f(x), \omega(1) = y\} = \{(x, \omega) \mid \omega(0) = f(x)\} = P(f)$
Złożenie $P(f) \rightarrow Y \times X \rightarrow Y$ jest więc rozwłóknieniem. \square

Zad. 55. Sprawdzić, że i_0 oraz r są homotopijnymi równoważnościami.

Definicja 3.10. Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem.

- *Homotopijnym włóknem f nad $y_0 \in Y$* nazywamy przeciwobraz $F(f, y_0) := p_f^{-1}(y_0)$,
- *Homotopijnym kowłóknem f lub stożkiem f* nazywamy przestrzeń ilorazową $C(f) := Z(f)/X$.

Włókno i kowłókno homotopijne wpisują się w diagram:

$$\begin{array}{ccc} & & F(f, y_0) := p_f^{-1}(y_0) \\ & & \downarrow \hookrightarrow \\ X & \xrightarrow{s_0} & P(f) \\ \downarrow i_f & \searrow f & \downarrow p_f \\ Z(f) & \xrightarrow{r_0} & Y \\ \downarrow q & & \\ C(f) := Z(f)/X & & \end{array}$$

Dualność między korozwłóknieniami i rozwłóknieniami, którą można zauważyć już w poprzednich zadaniach, opisuje następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.11 (K.Borsuk). *Jeśli $j : A \rightarrow X$ jest korozwłóknieniem i X jest lokalnie zwarta, to $j^* : \text{Map}(X, Y) \rightarrow \text{Map}(A, Y)$ jest rozwłóknieniem. Jeśli j jest homotopijną równoważnością, to j^* też jest homotopijną równoważnością.*

Dowód. Niech $Z(j) \xrightarrow{\bar{j}} X \times I \xrightarrow{r} Z(j)$ będzie retrakcja walca nad X na walec f . Zastosujmy do tych przestrzeni funktor $\text{Map}(-, Y)$ i stosując tw. otrzymujemy przemienny diagram w którym pionowe strzałki są homeomorfizmami:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Map}(Z(j), Y) & \xleftarrow{\bar{j}^*} & \text{Map}(X \times I, Y) & \xleftarrow{r^*} & \text{Map}(Z(j), Y) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ P(\bar{j}^*) & \xleftarrow{j^*} & P(\text{Map}(X, Y)) & \xleftarrow{r^*} & P(\bar{j}^*) \end{array}$$

Homeomorfizm $\text{Map}(Z(j), Y) \simeq P(\bar{j}^*)$ wynika stąd, że funktor $\text{Map}(-, Y)$ przeprowadza diagram push-out definiujący walec w diagram pull-back definiujący ko-walec:

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(A, Y) & \xleftarrow{j^*} & \text{Map}(X, Y) \\ \uparrow i_0^* & & \uparrow i_0^* \\ \text{Map}(A \times I, Y) & \xleftarrow{\bar{j}^*} & \text{Map}(Z(j), Y) \end{array}$$

Pamiętajmy, że $P(\text{Map}(A, Y)) \simeq \text{Map}(A \times I, Y)$. □

Przykład 4. Odwzorowania obcięcia $\text{Map}(D^n, Y) \rightarrow \text{Map}(S^{n-1}, Y)$ są rozwłóknieniami. Jeśli włożenie $\{x_0\} \subset X$ jest korozwłóknieniem, to ewaluacja $ev : \text{Map}(X, Y) \rightarrow Y$, $ev(f) := f(x_0)$ jest rozwłóknieniem.

3.4 Lokalny opis korozwłóknień i rozwłóknień

Poniższe twierdzenie opisuje w terminach wewnętrznych i lokalnych kiedy podprzestrzeń jest korozwłóknieniem.

Twierdzenie 3.12. *Dla domkniętego podzbioru $A \subset X$ następujące warunki są równoważne:*

1. $A \subset X$ jest korozwłóknieniem;
2. $X \times \{0\} \cup A \times I \subseteq X \times I$ jest silnym retraktem deformacyjnym;
3. Istnieje deformacja rel A , $D : X \times I \rightarrow X$ (tzn. homotopia taka, że $D(x, 0) = x$, $D(a, t) = a$), funkcja $\varphi : X \rightarrow I$ taka, że $A = \varphi^{-1}(1)$ oraz $D(\varphi^{-1}((0, 1]) \times \{1\}) \subset A$;
4. Istnieje otoczenie $U \supset A$ deformowalne rel (A) w X do A (tzn. istnieje homotopia $H : U \times I \rightarrow X$ taka, że $H(x, 0) = x$, $H(a, t) = a$, $H(x, 1) \subset A$) oraz funkcja $\varphi : X \rightarrow I$ taka, że $A = \varphi^{-1}(1)$ i $\varphi(x) = 0$ dla $x \in X \setminus U$.

Jeśli korozwłóknienie $A \subset X$ jest acykliczne (tzn. $A \subset X$ jest homotopijna równoważnością), to istnieje deformacja rel A , $D : X \times I \rightarrow X$ taka, że $D(X \times \{1\}) \subset A$.

Dowód. [1. \Rightarrow 3.] Ponieważ $A \subset X$ jest korozwłóknieniem, istnieje retrakcja $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, która posłuży nam do konstrukcji D i φ . Niech $\pi_1 : X \times I \rightarrow X$ oraz $\pi_2 : X \times I \rightarrow I$ będą projekcjami i zdefiniujmy $\varphi : X \rightarrow I$ wzorem $\varphi(x) := \sup\{\|t - \pi_2 r(x, t)\| \mid t \in I\}$ [sprawdzić ciągłość] oraz $D : X \times I \rightarrow X$ wzorem $D(x, t) = \pi_1 r(x, t)$. Mamy $\varphi^{-1}(0) = A$ bowiem $\varphi(x) = 0$ oznacza, że $r(x, t) \in A \times I$ dla $t > 0$ a stąd także $r(x, 0) \in A \times I$ gdyż $A \times I \subset X \times I$ jest podzbiorem domkniętym.

[3. \Rightarrow 1.] Przy pomocy D i φ definiujemy retrakcję $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$: $r(x, t) = (D(x, t), 0)$ dla $t \leq \varphi(x)$ oraz $r(x, t) = (D(x, t), t - \varphi(x))$ dla $t \geq \varphi(x)$.

[1. \Leftrightarrow 2.] Niech $r : X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, $r(x, t) = (r_1(x, t), r_2(x, t))$ będzie retrakcją. Zdefiniujmy $G : X \times I \times I \rightarrow X \times I$ wzorem:

$$G((x, t), s) = (r_1(x, (1-s)t), (1-s)r_2(x, t) + ts).$$

Łatwo widać, że G jest homotopią pomiędzy id a retrakcją r i ponadto dla $x \in A$ i dowolnego $s \in I$, $G((x, t), s) = (x, (1-s)t + ts) = (x, t)$. \square

Uwaga 1. Zauważmy, że jeśli X jest przestrzenią metryzowalną, to mając deformację D funkcje φ można zawsze skonstruować. Daje to bardzo intuicyjny warunek na to, by włożenie $A \subset X$ było korozwłóknieniem: wystarczy, żeby istniało otoczenie $U \supset A$ deformujące się w X do A . Można stąd łatwo wydedukować, że włożenia podrozmaitości domkniętej w rozmiatość gładką lub podwielościąnu w wielościąnu są korozwłóknieniami.

Wniosek 1. *Dowolne acykliczne korozwłóknienie $j : A \rightarrow X$ jest retraktem walca $i_0 : X \subset X \times I$. Dowolne acykliczne rozwłóknienie $p : E \rightarrow B$ jest retraktem kowalca $p_0 : P(E) \rightarrow E$.* \square

Dowód. Skonstruujemy diagram:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{j} & X & \xrightarrow{r} & A \\ \downarrow j & & \downarrow i_1 & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{\bar{j}} & X \times I & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

w którym złożenia górnych i dolnych strzałek są identycznościami. Niech $D : X \times I \rightarrow X$ będzie deformacją $rel(A)$ a $\varphi : X \rightarrow I$ funkcją taką, że $\varphi^{-1}(0) = A$. Definiujemy $\bar{i}(x) := (x, \varphi(x))$ oraz homotopię: $H(x, t) := D(x, 1 - \min(t/\varphi(x), 1))$. Homotopia H jest ciągła (sprawdzić!) oraz

$$H \circ \bar{j}(x) = D(x, 1 - \min(\varphi(x)/\varphi(x), 1)) = D(x, 0) = x.$$

Łatwo sprawdzić, że powyższy diagram jest przemienny, stąd $j : A \rightarrow X$ jest retrakcją walca $i_0 : X \rightarrow X \times I$. \square

Zad. 56. Jeżeli $A \subset X$ i $B \subset Y$ są parami Borsuka, to włożenia $A \times B \subset X \times B \cup A \times Y$ oraz $X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$ są parami Borsuka.

Zad. 57. Jeśli $p : E \rightarrow B$ jest przekształceniem takim, że dla pewnego numerowalnego pokrycia otwartego $\{U_i\}_{i \in I}$ obcięcia $p : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$ są rozwłóknieniami, to p jest rozwłóknieniem. W szczególności jeśli $p : E \rightarrow B$ jest przekształceniem lokalnie trywialnym, a B jest parazwarta (np. metryzowalna), to p jest rozwłóknieniem.⁶

⁶p. Albrecht Dold "Partitions of Unity in the Theory of Fibrations" Annals of Mathematics, Vol. 78, No. 2 (1963), pp. 223-255 lub Neil Strickland *Local fibrations*, [Spanier] Tw. 2.7.12., [May] rozdz.7.4

3.5 Korozwłóknienia, rozwłóknienia i homotopijne równoważności

Trzy klasy przekształceń: rozwłóknienia, korozwłóknienia i homotopijne równoważności w pewnym sensie "generują" wszystkie przekształcenia i są między sobą powiązane. Wprowadźmy następujące oznaczenia klas morfizmów w \mathcal{T} :

1. Cof – korozwłóknienia;
2. Fib – rozwłóknienia;
3. Eq – homotopijne równoważności.

(Ko-)rozwłóknienia, które są jednocześnie homotopijnymi równoważnościami nazywamy *acyklicznymi* i stosujemy oznaczenia: $ACf := Cof \cap Eq$ oraz $AFb := Fib \cap Eq$. Następne twierdzenie opisuje jak klasa Eq i każda z dwóch klas Fib i Cof wyznacza trzecią.

Twierdzenie 3.13. *Zachodzą następujące równości klas przekształceń:*

1. $Fib = ACof^\perp$
2. $AFib = Cof^\perp$
3. $Cof = {}^\perp AFib$
4. $ACof = {}^\perp Fib$

gdzie $(\cdot)^\perp$ (odp. ${}^\perp(\cdot)$) oznacza klasę odwzorowań prostopadłych z prawej (odp. z lewej) strony do klasy (\cdot) . [p. Rozdział 1.5]

Dowód. [1.] $ACof^\perp = Fib$ Ponieważ walec $i_0: X \subset X \times I$ należy do ACf , więc $ACf^\perp \subset Fib$. Ponieważ dowolne rozwłóknienie jest prawo ortogonalne do walca, a dowolne acykliczne korozwłóknienie jest retraktem walca, więc ponieważ klasa ACf^\perp jest zamknięta na retrakty mamy także $ACf^\perp \supset Fib$.

[2.] $Cof^\perp = AFib$ Ponieważ walec $i_0: X \subset X \times I$ należy do Cof , więc $Cof^\perp \subset Fib$. Trzeba sprawdzić, że dowolne odwzorowanie $p: E \rightarrow B \in Cof^\perp$ jest homotopijną równoważnością. Ponieważ dowolne acykliczne rozwłóknienie jest retraktem kowalca $p_0: P(Y) \rightarrow Y$, więc mamy też inkluzję $Cof^\perp \supset AFb$.

[3.] $Cof = {}^\perp AFb$ Ponieważ każde korozwłóknienie jest lewo ortogonalne do kowalca, jest też lewo ortogonalne do dowolnego acyklicznego rozwłóknienia. Mamy więc $Cof \subset {}^\perp AFb$ Odwrotna inkluzja wynika z definicji korozwłóknienia.

[4.] $ACof = {}^\perp Fib$ Walec należy do ${}^\perp Fib$ i do ACf , a ponieważ dowolne acykliczne korozwłóknienie jest jego retraktem, więc $ACf \subset {}^\perp Fib$. Odwrotnie, niech $j \in {}^\perp Fib$. Wtedy j jest korozwłóknieniem. Trzeba pokazać, że jest homotopijną równoważnością....

□

3.6 Relatywne homotopijne równoważności

Dla dowodu następnego bardzo ważnego twierdzenia wygodnie jest wprowadzić dalszą terminologię kategoryjną. Dla ustalonej przestrzeni A rozważmy kategorię \mathcal{T}^{cofA} będącą podkategorią w \mathcal{T}^A składającą się z korozwłóknień. W kategorii \mathcal{T}^A mamy relację homotopii przekształceń rel A i odpowiednie kategorie homotopii oznaczamy $(\mathcal{T}^{cofA})_h \subset (\mathcal{T}^A)_h$. Funktor zapominania $\mathcal{T}^A \rightarrow \mathcal{T}$ indukuje functor zapominania na odpowiednich kategoriach homotopii.

Twierdzenie 3.14. *Jeśli funktor zapominania przeprowadza pewien morfizm w kategorii $(\mathcal{T}^{\text{cof}A})_h$ na izomorfizm w \mathcal{T}_h , to jest on izomorfizmem w $(\mathcal{T}^{\text{cof}A})_h$. Oznacza to, że jeśli w diagramie przeciwnym przestrzeni topologicznych*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

odwzorowania i, j są korozwłóknieniami a f homotopijną równoważnością to f jest homotopijną równoważnością $\text{rel}(A)$.

Dowód twierdzenia poprzedzimy kilkoma lematami o charakterze kategoriowym.

Lemat 3.1. *Jeśli klasa morfizmów \mathcal{M} w kategorii \mathcal{C} jest zamknięta ze względu na złożenia i każdy morfizm w \mathcal{M} ma w \mathcal{M} lewostronną (odp. prawostronną) odwrotność, to każdy morfizm w \mathcal{M} jest izomorfizmem.*

Dowód. Dla każdego morfizmu $f \in \mathcal{M}$ istnieje $g \in \mathcal{M}$ taki, że $gf = id$. Z założenia istnieje $f' \in \mathcal{M}$ taki, że $f'g = id$. Ponieważ lewo- i prawostronna odwrotność muszą być równe, mamy $f = f'$ a stąd g jest obustronną odwrotnością f . \square

Lemat 3.2. *Niech $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ będzie funktorem. Załóżmy, że dla każdego endomorfizmu $e \in \mathcal{C}$ takiego, że $F(e) = id$ istnieje lewa (odp. prawa) odwrotność w \mathcal{C} . Wtedy dla dowolnego morfizmu $f \in \mathcal{C}$ takiego, że istnieje $g \in \mathcal{C}$ takie, że $F(gf) = id$ w \mathcal{D} istnieje lewa (odp. prawa) odwrotność w \mathcal{C} .*

Dowód. Rozważmy endomorfizm $gf \in \mathcal{C}$. Na mocy założenia istnieje $e' \in \mathcal{C}$ taki, że $e'(gf) = id$. Stąd $e'g$ jest lewą odwrotnością morfizmu $f \in \mathcal{C}$. \square

Lemat 3.3. *Jeśli $A \xrightarrow{i} X$ oraz $A \xrightarrow{j} Y$ są korozwłóknieniami a w diagramie*

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

przekształcenie f jest zwykłą homotopijną równoważnością, to istnieje przekształcenie

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ i \swarrow & & \searrow j \\ Y & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

takie, że $gf \sim id_X$

Dowód. Niech $Y \xrightarrow{g'} X$ będzie lewą odwrotnością f . Wtedy $fg' \sim i$ i oznaczmy $H : A \times I \rightarrow X$ homotopią między nimi. Ta homotopia, wraz z przekształceniem $g' : Y \rightarrow X$ - dzięki temu, że j jest korozwłóknieniem - rozszerza się do homotopii $\bar{H} : Y \times I \rightarrow X$, takiej, że $\bar{H}(y, 0) = g'(y)$ oraz $\bar{H}(j(a), 1) = i(a)$, a więc $g_1 := \bar{H}(-, 1)$ jest szukanym przekształceniem. \square

Dowód. (Twierdzenia). Dzięki poprzednim lematom wystarczy skonstruować lewą odwrotność $\text{rel}(A)$ dla dowolnego endomorfizmu $X \xrightarrow{f} X$ $\text{rel}(A)$ homotopijnego (zwykle) z identyčnością. Niech $H: f \sim id$ będzie homotopią między f i identyčnością. Ponieważ i jest korozwłóknieniem, jej obcięcie $k := H \circ (i \times id): A \times I \rightarrow X$ z warunkiem początkowym $id: X \times \{0\} \rightarrow X$ rozszerza się do $K: X \times I \rightarrow X$ takiej, że $K(x, 0) = x$ oraz $K(i(a), 1) = a$, czyli przekształcenie $e(x) := K(x, 1)$ jest przekształceniem $\text{rel}(A)$ homotopijnym z id_X . Udowodnimy, że jest szukaną lewą odwrotnością, konstruując homotopię $ef \sim id_X \text{ rel}(A)$.

Rozważmy kompozycję dwóch homotopii: $G_0 := H^{-1} * K \circ (f \times id): X \times I \rightarrow X$. Z definicji homotopii H, K wynika, że dla każdego $a \in A$ droga $G_0(j(a), -) = H^{-1}(j(a), -) * H(j(a), -)$ jest kanonicznie homotopijna ze stałą. Definiujemy więc (podwójną) homotopię $G: A \times I \times I \rightarrow X$ taką, że $G(a, t, 0) = G_0(a, t)$ oraz $G(a, 0, t) = G(a, 1, t) = G(a, t, 1) = i(a)$. Homotopię tę rozszerzamy do $\bar{G}: X \times I \times I \rightarrow X$ z warunkiem początkowym danym G_0 . Szukana homotopia $ef \sim id_X \text{ rel}(A)$ dana jest jako kompozycja obcięć homotopii \bar{G} do trzech boków kwadratu: $(\bar{G}|_{X \times 0 \times I}) * (\bar{G}|_{X \times I \times 1}) * (\bar{G}|_{X \times 1 \times I})^{-1}$. \square

Wniosek 2. *Jeśli $A \subset X$ jest acyklicznym korozwłóknieniem, to A jest silnym retraktem deformacyjnym X .*

Dowód. Stosujemy poprzednie twierdzenie do diagramu:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ id \swarrow & & \searrow i \\ A & \xrightarrow{i} & X \end{array}$$

\square

Twierdzenie 3.15. *Niech $A \xrightarrow{i} X$ będzie korozwłóknieniem. Każdej homotopii $F: A \times I \rightarrow Y$ odpowiada homotopijna równoważność $h_A: Y \cup_{f_0} X \simeq Y \cup_{f_1} X \text{ rel}(Y)$, przy czym homotopii trywialnej odpowiada id a kompozycji homotopii odpowiada (z dokładnością do homotopii) złożenie homotopijnych równoważności.*

Dowód. Niech $F: A \times I \rightarrow Y$ będzie homotopią między f_0 i f_1 . Wykażemy, że oba włożenia $X \cup_{f_k} Y \subseteq (X \times I) \cup_F Y$ dla $k = 0, 1$ są reraktami deformacyjnymi. Ze względu na symetrię wystarczy ograniczyć się do $k = 0$. Zauważmy oczywisty homeomorfizm, wynikający z definicji doklejania:

$$X \cup_{f_0} Y = (X \times \{0\} \cup A \times I) \cup_F Y \subset (X \times I) \cup_F Y.$$

Niech $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ będzie silną retrakcją deformacyjną zaś G homotopią definiującą silną deformację. Kładąc identyčność na przestrzeni Y retrakcję r rozszerzamy do retrakcji $r_0: (X \times I) \cup_F Y \rightarrow X \cup_{f_0} Y$. Ponieważ homotopia G jest stała na $X \times \{0\} \cup A \times I$, to rozszerza się w oczywisty sposób do homotopii \bar{G} kładąc identyčność na przestrzeni Y . \square

Wniosek 3. *Jeśli $j: A \subset X$ jest parą Borsuka oraz A jest zbiorem ściągającym, to projekcja $X \rightarrow X/A$ jest homotopijną równoważnością. Dla dowolnej pary Borsuka $j: A \subset X$ projekcją $C(f) := Z(f)/X \times \{1\} \rightarrow X/A$ jest homotopijną równoważnością, czyli homotopijne kowłóknienie jest homotopijnie równoważne z przestrzenią ilorazową.*

Zad. 58. Udowodnić ostatni wniosek bezpośrednio z definicji korozwłóknienia.

Zad. 59. Jeśli $j : A \subset X$ jest parą Borsuka i X jest ściągająca, to przestrzeń X/A jest homotopijnie równoważna z zawieszeniem $\Sigma(A)$.

Ostatni wniosek jest potężnym narzędziem dowodzenia nieoczywistych homotopijnych równoważności. [p.Zadania różne.]

Zachodzi także następująca wersja Tw.3.14 dotycząca morfizmów między dwoma korozwłóknieniami zdefiniowanymi na różnych przestrzeniach.

Twierdzenie 3.16. *Jeśli w diagramie*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

i, j są korozwłóknieniami, a f oraz d są homotopijnymi równoważnościami, to (f, d) jest homotopijną równoważnością par.

3.7 Włókniste homotopijne równoważności

Udowodnimy własności rozwłóknień, dualne do własności rozwłóknień opianych w poprzednim rozdziale.

Twierdzenie 3.17. *Jeśli w diagramie przemiennym przestrzeni topologicznych*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & & B \end{array}$$

odwzorowania p, p' są rozwłóknieniami a odwzorowanie f jest (zwykłą) homotopijną równoważnością, to f jest włóknistą homotopijną równoważnością.

Zad. 60. Sformułować Twierdzenie 3.17 w terminach kategorijskich, analogicznie do Twierdzenia 3.14

Dowód. Dowody odpowiedników lematów 1-3 poprzedzających dowód Tw. 3.14 pozostawiamy jako ćwiczenie. Wykażemy, że jeśli $f \simeq id_E$ jest włóknistym endomorfizmem rozwłóknienia $E \xrightarrow{p} B$, to jest f posiada prawą włóknistą homotopijną odwrotność. Niech $\tilde{H} : E \times I \rightarrow E$ homotopią między f a id . Żeby skonstruować włóknistą prawą homotopijną odwrotność f rozpatrzmy podniesienie $\tilde{G} : E \times I \rightarrow E$ homotopii $G := p\tilde{H} : E \times I \rightarrow B$ z warunkiem początkowym $E \times 0 \xrightarrow{id} E$. Zdefiniujemy $g(e) := \tilde{G}(e, 1)$; wykażemy, że $id \sim_B fg$.

Zdefiniujemy homotopię $\tilde{K}_0 := \tilde{H}^{-1} * (f \circ \tilde{G}) : id \sim fg$ i rozważmy $p\tilde{K} = H^{-1} * G$. Ta homotopia rozszerza się na kwadrat do homotopii $K : E \times I \times I \rightarrow B$ takiej, że $K(e, t, 0) = K_0(e, t)$ oraz $K(e, 0, t) = K(e, 1, t) = K(e, t, 1) = p(e)$. Podnieśmy ją do $\tilde{K} : E \times I \times I \rightarrow E$ z warunkiem początkowym $\tilde{K}_0 : E \times 0 \rightarrow E$. Kompozycja homotopii otrzymanych przez obcięcie \tilde{K} do trzech "wolnych" boków kwadratu definiuje homotopię $id \sim_B fg$ (p.dowód tw. 0.1). \square

Twierdzenie 3.18. *Jeśli $E \xrightarrow{p} B$ jest rozwłóknieniem oraz $X \xrightarrow{f} B$ dowolnym przekształceniem, to pull-back $f^*E \xrightarrow{p'} X$ jest rozwłóknieniem.*

Twierdzenie 3.19. Niech $E \xrightarrow{p} B$ będzie rozwałknieniem. Każda homotopia $X \times I \xrightarrow{F} B$ wyznacza klasę homotopijnych równoważności rozwałknień indukowalnych $f_0^*E \sim_X f_1^*E$, przy czym homotopii trywialnej odpowiada identyczność, a kompozycji homotopii odpowiada złożenie równoważności. Dwa przekształcenia $F_0, F_1 : X \times I \rightarrow B$ homotopijne rel $(X \times \{0, 1\})$ wyznaczają tę samą klasę włóknistych równoważności

Dowód. Przy pomocy homotopii F można przeciągnąć rozwałknienie p nad walec $X \times I$; wystarczy więc pokazać jak rozwałknienie $E \xrightarrow{p} X \times I$ wyznacza włóknistą homotopijną równoważność obcięć do dolnej i górnej podstawy. Oznaczmy dla $k = 0, 1$ przez $E_k := p^{-1}(E \times \{k\}) = i_k^*E$. Utożsamienie E_0 z E_1 polega na "przeniesieniu" włókien E_0 wzdłuż tworzących walca do E_1 .

Zdefiniujmy homotopię $E_0 \times I \xrightarrow{p_0 \times id} X \times I$ i jej podniesienie $\tilde{P} : E_0 \times 0 \rightarrow E$ z warunkiem początkowym $E_0 \times 0 \subset E$. Oczywiście, dla każdego $t \in I$ mamy $\tilde{P}(-, t) : E_0 \times 1 \rightarrow E_t$. Kompozycji homotopii można przyporządkować złożenie tych przekształceń. Trzeba sprawdzić, że klasa włóknistej homotopii nie zależy od wyboru podniesienia \tilde{P} . Wykażemy od razu więcej - że dwa przekształcenia $F_0, F_1 : X \times I \rightarrow B$ homotopijne rel $(X \times \{0, 1\})$ wyznaczają tę samą klasę włóknistych równoważności. Niech $g_0 : E_0 \times I \rightarrow F_0^*E$ oraz $g_1 : E_0 \times I \rightarrow F_1^*E$ będą homotopiami skonstruowanymi według powyższego przepisu. Rozważmy homotopię $F : F_0 \sim F_1$ rel $(X \times \{0, 1\})$ i rozwałknienie przeciągnięte $F^*E \rightarrow X \times I \times I$ oraz homotopię

$$p_0 \times id \times id : E_0 \times I \times I \rightarrow X \times I \times I.$$

Podnosząc $H := p_0 \times id \times id$ z warunkiem początkowym określonym na "korytku":

$$\tilde{H}_{I \times 0} : E_0 \times I \times 0 \rightarrow E, \quad \tilde{H}_{I \times 0}(e, t, 0) = e \in E_0 \subset F^*E$$

$$\tilde{H}_{0 \times I} : E_0 \times 0 \times I \rightarrow E, \quad \tilde{H}_{0 \times I}(e, 0, t) = g_0(e, t) \in F_0^*E \subset F^*E$$

$$\tilde{H}_{1 \times I} : E_0 \times 1 \times I \rightarrow E, \quad \tilde{H}_{1 \times I}(e, 1, t) = g_1(e, t) \in F_1^*E \subset F^*E$$

otrzymujemy homotopię $\tilde{H} : E_0 \times I \times I \rightarrow E$, której obcięcie $\tilde{H}|_{E_0 \times 1 \times I}$ zadaje szukaną włóknistą homotopię. \square

Wniosek 3.1. Niech $p : E \rightarrow B$ będzie rozwałknieniem. Istnieje funktor z grupoidu podstawowego $\mathcal{G}(B)$ przestrzeni B do kategorii homotopii przestrzeni topologicznych przypisujący każdemu punktowi $b \in B$ włókno nad nim $p^{-1}(b)$ a klasie homotopii drogi $\omega : I \rightarrow B$ klasę homotopii $h_{[\omega]} : p^{-1}(\omega(0)) \rightarrow p^{-1}(\omega(1))$

Dowód. Traktujemy drogę $\omega : I \rightarrow B$ jako homotopię między włożeniami punktów końcowych i stosujemy twierdzenie 3.7 \square

Wniosek 3.2. Jeśli $p : E \rightarrow B$ jest rozwałknieniem, to istnieje włóknista homotopijna równoważność $E \sim_B P_p$, gdzie $P_p \rightarrow B$ jest kocyndrem odwzorowania p . W szczególności dla każdego punktu $b \in B$ włókno $p^{-1}(b)$ i homotopijne włókno $Fib(f, b)$ są homotopijnie równoważne.

Dowód. Z konstrukcji kocyndra wiemy, że istnieje przekształcenie włókniste $s : E \rightarrow P_p$, które jest zwykłą homotopijną równoważnością. Skoro p jest rozwałknieniem, z twierdzenia 3.17 wynika, że s jest włóknistą homotopijną równoważnością. \square

Zad. 61. Jeśli $p : E \rightarrow B$ jest rozwałknieniem nad przestrzenią łukowo spójną, a przestrzeń E jest ściągalna to istnieje homotopijna równoważność: $p^{-1}(b_0) \simeq \Omega(B, b_0)$. (Jest to dualna własność do Przykładu 59.)

4 Zadania różne

4.1 Retrakty

Zad. 62. Podać przykład włożenia $A \hookrightarrow X$, które jest homotopijną równoważnością i takiego, że A nie jest retraktem deformacyjnym X .

Zad. 63. Podać przykład reaktu, który nie jest retraktem deformacyjnym. Podać przykład reaktu deformacyjnego, który nie jest silnym retraktem deformacyjnym.

Zad. 64. Pokazać, że przekształcenie $f : X \rightarrow Y$ jest homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy $X = X \times \{1\} \subset Z(f)$ jest retraktem deformacyjnym.

Zad. 65. Jeśli $A \subset X$ jest silnym retraktem deformacyjnym, to dla dowolnego przekształcenia $f : A \rightarrow Y$ włożenie $Y \subset X \cup_f Y$ też jest silnym retraktem deformacyjnym.

4.2 Walce i kowalce

Zad. 66. Opisać walec i kowalec identyczności $id_X : X \rightarrow X$ przekształcenia stałego $X \rightarrow pt$ oraz włożenia punktu $pt \rightarrow X$.

Zad. 67. Walec o podstawie X jest korozwłóknieniem. Kowalec nad X jest rozwłóknieniem.

4.3 Homotopijne równoważności

Zad. 68. Istnieją następujące homotopijne równoważności:

1. $S^n/S^k \sim S^n \vee S^{k+1}$
2. $(S^n \times S^m)/(S^n \times \{s_0\}) \sim S^{n+m} \vee S^m$
3. $\Sigma(S^n \times S^m) \sim S^{n+1} \vee S^{m+1} \vee S^{n+m+1}$
4. ΣP_g , gdzie P_g jest precelem genusu g , jest homotopijnie równoważne z bukietem $2g$ egzemplarzy sfer S^2 i sfery S^3 .

Wskazówka: Dla dowolnej punktowanej przestrzeni (X, x_0) i przestrzeni Y istnieje homeomorfizm $X \times Y/\{x_0\} \times Y \simeq X \wedge Y^+$ gdzie $Y^+ := Y \coprod \{+\}$. W szczególności dla dwóch niepuktowanych przestrzeni X, Y mamy $X^+ \wedge Y^+ \simeq (X \times Y)^+$.

Zad. 69. Jeśli X jest przestrzenią ściągającą to stożek przekształcenia $f : Y \rightarrow X$ jest homotopijnie równoważny z zawieszeniem ΣY .

4.4 Rozwłóknienia i korozwłóknienia

Zad. 70. Niech V, W będą rzeczywistymi skończone wymiarowymi przestrzeniami liniowymi (z naturalną topologią w której działania są ciągłe).

1. Dowolny monomorfizm $j : V \rightarrow W$ jest korozwłóknieniem;
2. dowolny epimorfizm $p : W \rightarrow V$ jest rozwłóknieniem;
3. Jeśli $V \subset W$ jest podprzestrzenią liniową a $U \subset W$ podzbiorem otwartym, to włożenie $V \cap U \subset U$ jest korozwłóknieniem.

Zad. 71. Jeśli $X = A \cup B$ gdzie A, B są podzbiorami domkniętymi oraz $A \cap B \subset A$ jest parą Borsuka, to włożenie $A \subset X$ jest parą Borsuka.

Zad. 72. Jeżeli $A \subseteq X$ jest parą Borsuka, to $X \times \{0\} \cup A \times I \cup X \times \{1\} \subseteq X \times I$ jest także parą Borsuka.

Zad. 73. Para Borsuka $i: A \hookrightarrow X$ jest homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy gdy A jest silnym retraktem deformacyjnym X .

Zad. 74. Jeśli $p: E \rightarrow B$ jest rozwłoknieniem z włóknem F , to dla dowolnej przestrzeni lokalnie zwartej X odwzorowanie indukowane $p_*: \text{Map}(X, E) \rightarrow \text{Map}(X, B)$ jest rozwłoknieniem. Zbadać jego włókno.

Zad. 75. Podać przykład dwóch przekształceń włóknistych, które są homotopijne, ale nie są włóknście homotopijne.

Zad. 76. Czy homotopijne przekształcenia muszą mieć homotopijnie równoważne homotopijne włókna i homotopijne kowłókna?

Zad. 77. Niech $p: E \rightarrow B$ będzie rozwłoknieniem nad łukowo spójną przestrzenią.

1. Jeżeli istnieje $b \in B$ takie, że $p^{-1}(b)$ jest łukowo spójne, to E jest także łukowo spójna;
2. Jeżeli E jest łukowo spójna zaś B jednospójna, to włókna p są łukowo spójne.

Zad. 78. Skonstruować rozwłoknienie $E \rightarrow B$ takie, że $B \approx CP^\infty$, $E \approx S^2$, zaś włókno jest homotopijnie równoważne z S^3 .

5 Ciągi zbiorów klas homotopii

W tym rozdziale rozpatrujemy przestrzenie z wyróżnionym punktem i odwzorowania zachowujące punkt wyróżniony, czyli pracujemy w kategorii \mathcal{T}_* oraz \mathcal{T}_{*h} . Wyróżnianie punktu ma charakter techniczny, ułatwiając wprowadzanie pomocniczych struktur algebraicznych. Będziemy zakładać, że włożenie punktu wyróżnionego w przestrzeń jest korozwłoknieniem. Takie przestrzenie nazywamy *dobrze punktowanymi*. Ponieważ będziemy rozważać tylko przestrzenie dobrze punktowane, więc słowo "dobrze" będziemy z reguły pomijać. Będziemy też często pomijać w oznaczeniach punkt wyróżniony, pisząc X zamiast (X, x_0) .

W tym rozdziale bardzo ważną rolę będzie odgrywać pojęcie dokładności ciągu zbiorów, zbiorów z wyróżnionym punktem lub grup.

Definicja 5.1. Diagram odwzorowań zbiorów

$$E \xrightarrow{i} S \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} T$$

nazwiemy *dokładnym* jeśli $\forall s \in S$ takiego, że $f(s) = g(s) \exists e \in E$ taki, że $i(e) = s$. Ciąg zbiorów z wyróżnionymi punktami $(E, e_0) \xrightarrow{i} (S, s_0) \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} (T, t_0)$ nazywa się *dokładnym* jeśli $i(E) = f^{-1}(t_0)$.

Poznane w poprzednich rozdziałach konstrukcje walca, stożka, zawieszenia itp. mają swoje odpowiedniki w kategorii punktowanej, określane przymiotnikiem "zredukowane". Walec zredukowany o podstawie X to $X \wedge I^+$, stożek zredukowany to $X \wedge I/X \times 1$ zawieszenie zredukowane $S^1 \wedge X$. Według tej samej zasady definiujemy stożek odwzorowania punktowanego. Zauważmy, że jeśli przestrzeń jest dobrze punktowana to projekcja z konstrukcji niezredukowanej na zredukowaną jest homotopijną równoważnością, bo polega na ściągnięciu do punktu podzbioru ściągalnego (jednej tworzącej).

W przypadku kowalca, kostożka itp. przejście do kategorii punktowanej polega jedynie na wyróżnieniu punktu bazowego.

Zad. 79. Podać odpowiednia definicje i pokazać, że jeśli zakładamy, że przestrzenie są dobrze punktowane, to każde (ko-)rozwłóknienie "zwykłe" jest także po wyróżnieniu punktu, (ko-)rozwłóknieniem punktowanym.

5.1 Ciągi kowłókniste i włókniste

Przypomnijmy, w kontekście punktowanym, definicje homotopijnego kowłókna i homotopijnego włókna znane z Rozdziału 3.3.

Definicja 5.2. Dla przekształcenia przestrzeni punktowanych $f: A \rightarrow B$ definiujemy *stożek punktowany przekształcenia (homotopijne kowłókno)* jako push-out w kategorii przestrzeni punktowanych:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ C(A) & \longrightarrow & C(f) \end{array} \quad (1)$$

gdzie $i: A \hookrightarrow C(A)$ jest włożeniem na podstawę zredukowanego stożka. Równoważnie, stożek możemy zdefiniować jako przestrzeń ilorazową zredukowanego walca odwzorowania:

$$C(f) := Z_f/A \times \{1\}.$$

Ciąg przekształceń przestrzeni punktowanych $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ nazywamy *homotopijnie kowłóknistym* jeśli jest homotopijnie równoważny z ciągiem $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f)$ tzn. istnieje homotopijnie przemienny diagram w \mathcal{T}_{*h} :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{i} & C(f) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

w którym pionowe przekształcenia są punktowanymi homotopijnymi równoważnościami.

Definicja 5.3. *Ko-stożek punktowany przekształcenia (homotopijne włókno)* $F(f)$ definiujemy jako pull-back:

$$\begin{array}{ccc} F(f) & \xrightarrow{p} & A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ P(B, b_0) & \xrightarrow{p_1} & B \end{array}$$

gdzie $P(B, b_0) := \{\omega \in P(B) \mid \omega(0) = b_0\}$ oraz $p_1(\omega) := \omega(1)$ lub równoważnie:

$$F(f) := \{(a, \omega) \in P_f \mid \omega(1) = b_0\}.$$

z punktem wyróżnionym (a_0, ω_{b_0}) .

Ciąg punktowanych przekształceń $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ nazywamy *homotopijnie włóknistym* jeśli jest homotopijnie równoważny z ciągiem $F(f) \xrightarrow{pf} A \xrightarrow{f} B$ tzn. istnieje homotopijnie przemienny diagram w \mathcal{T}_{*h} :

$$\begin{array}{ccccc} F(f) & \xrightarrow{p} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

w którym pionowe przekształcenia są homotopijnymi równoważnościami.

Ciąg odwzorowań punktowanych $\dots \rightarrow X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1} \rightarrow \dots$ nazwiemy *(ko-) włóknistym* jeśli każde kolejne dwa przekształcenia $X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1}$ są ciągiem (ko-) włóknistym.

Zad. 80. Powyższa definicja włókna homotopijnego pokrywa się z podaną w Rozdziale 3.3.

Przykład 5. Jeśli $j : A \hookrightarrow X$ jest parą Borsuka to ciąg $A \rightarrow X \rightarrow X/A$ jest kowłóknisty. Jeśli $p : E \rightarrow B$ jest rozwłóknieniem to ciąg $F \hookrightarrow E \rightarrow B$, gdzie $F := p^{-1}(b_0)$ jest włóknisty. (p.Rozdz. 3.6 i 3.7)

Zad. 81. Opisać homeomorfizmy $C(\Sigma f) \simeq \Sigma C(f)$ oraz $F(\Omega f) \simeq \Omega F(f)$.

Lemat 5.1. *Jeśli ciąg $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ jest kowłóknisty, to ciąg $\Sigma X \rightarrow \Sigma Y \rightarrow \Sigma Z$ też jest kowłóknisty. Jeśli ciąg $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ jest włóknisty, to ciąg $\Omega X \rightarrow \Omega Y \rightarrow \Omega Z$ też jest włóknisty.*

Dowód. Zadanie. □

Twierdzenie 5.4. [D. Puppe⁷] *Dla dowolnego punktowanego odwzorowania $f : A \rightarrow B$ istnieje kowłóknisty ciąg odwzorowań*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B \xrightarrow{\Sigma \delta} \Sigma C(f) \rightarrow \dots$$

zwany prawym ciągiem Puppe odwzorowania f , oraz dualny włóknisty ciąg

$$\dots \rightarrow \Omega F(f) \xrightarrow{\Omega p} \Omega A \xrightarrow{\Omega f} \Omega B \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} B$$

zwany lewym ciągiem Puppe odwzorowania f .

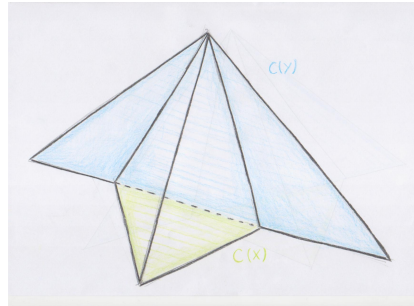
Dowód. Zaczniemy od prawego ciągu Puppe. Odwzorowanie $C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A$ jest zdefiniowane jako złożenie projekcji $C(f) \rightarrow C(f)/B$ i homeomorfizmu $C(f)/B \simeq \Sigma A$. Na mocy Lematu 5.1 wystarczy pokazać, że kowłókniste są krótkie ciągi rozpoczynające się do $A, B, C(f)$.

Ciąg $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i} C(f)$ jest kowłóknisty z definicji.

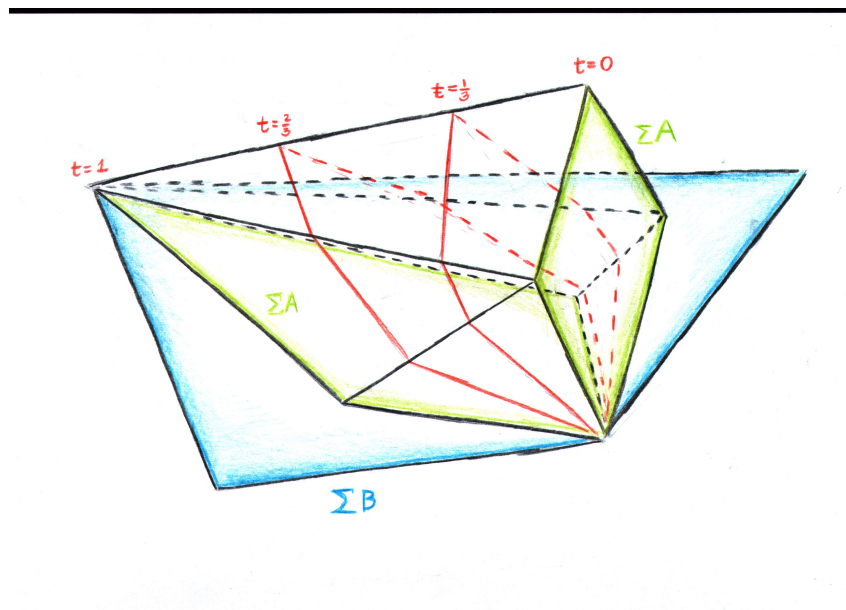
Ciąg $B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A$ jest homotopijnie równoważny $B \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\delta} C(i)$ bowiem i jest włożeniem B na podstawę stożka $C(f)$, czyli korozwłóknieniem, a więc $C(i) \simeq C(f)/i(B) \simeq \Sigma A$.

⁷Dieter Puppe (Łódź 1930 – 2005 Heidelberg)

Rozważmy ciąg $C(f) \xrightarrow{\delta} \Sigma A \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma B$ i zauważmy, że istnieje homeomorfizm stożka $\Sigma A \hookrightarrow C(\delta)$ z walcem $\Sigma A \hookrightarrow Z(\Sigma f)$. Poniższe rysunki⁸ pokazują stożek $C(C(f))$, który doklejamy przy pomocy δ do ΣA : (Uwaga: na rysunku powinno być $X = A, Y = B$)



oraz efekt tego przyklejenia, czyli przestrzeń homeomorficzną z walcem $Z(\Sigma f)$.



Składając włożenie $\Sigma A \hookrightarrow Z(\Sigma f)$ z retrakcją deformacyjną $Z(\Sigma f) \xrightarrow{r} \Sigma B$ otrzymujemy przemienne diagram, w którym pionowe strzałki są homotopijnymi równoważnościami:

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{i} & C(f) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A \xrightarrow{i} C(\delta) \simeq Z(\Sigma f) \\
 & & & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow r \\
 & & & & C(f) & \xrightarrow{\delta} & \Sigma A & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma B
 \end{array}$$

Podobnie dowodzimy włóknistość lewego ciągu Puppe. Pierwsze dwa przekształcenia są z definicji ciągami włóknistymi. Pozostaje sprawdzić, że ciągi $\Omega B \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{p} A$ oraz $\Omega A \xrightarrow{\Omega f} \Omega B \xrightarrow{\partial} F(f)$ są włókniste. Rzutowanie $F(f) \xrightarrow{p} A$ jest rozwłóknieniem, a jego włóknem jest

$$p^{-1}(a_0) = \{(a_0, \omega) \mid \omega(1) = b_0, \omega(0) = f(a_0) = b_0\} = \Omega B.$$

⁸rys. Paweł Ciosmak

Odwzorowanie $\Omega B \xrightarrow{\partial} F(f)$ jest włożeniem $\partial(\omega) := (a_0, \omega)$. Dualnie do poprzedniego przypadku istnieje przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccccc} F(\partial) = P_{\Omega f} & \longrightarrow & \Omega B & \xrightarrow{\partial} & F(f) \\ \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow id \\ \Omega A & \xrightarrow{\Omega f} & \Omega B & \xrightarrow{\partial} & F(f) \end{array}$$

w którym pionowe strzałki są homotopijnymi równoważnościami. Utożsamienie $F(\partial) = P_{\Omega f}$ otrzymujemy wypisując definicje obu przestrzeni:

$$F_{\partial} := \{(\gamma, \Gamma) \mid \gamma \in \Omega B, \Gamma(t) = (\tilde{\gamma}(t), \gamma_t), f\tilde{\gamma}(t) = \gamma_t(0), (\tilde{\gamma}(0), \gamma_0) = (a_0, b_0), (\tilde{\gamma}(1), \gamma_1) = (a_0, \gamma)\}$$

$$P_{\Omega f} := \{(\tilde{\gamma}, \Lambda) \mid \tilde{\gamma} \in \Omega A, \Lambda(t) = \gamma_t, \gamma_t(0) = \gamma_t(1) = b_0, f\tilde{\gamma} = \gamma_0\}.$$

Parze $(\gamma, \Gamma) \in F_{\partial}$ w której $\gamma \in \Omega B, \Gamma(t) = (\tilde{\gamma}(t), \gamma_t)$ przypisujemy parę $(\tilde{\gamma}, \Lambda)$ gdzie $\Lambda(t) := \gamma_t$. \square

5.2 Homotopijne koekwalizatory i ekwalizatory

Definicja 5.5. *Homotopijny koekwalizator* dwóch punktowanych przekształceń $f, g: A \rightarrow B: B \xrightarrow{\bar{i}} T(f, g)$ definiujemy jako push-out w kategorii \mathcal{T}_* :

$$\begin{array}{ccc} A \vee A & \xrightarrow{f \vee g} & B \\ \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\ A \wedge I^+ & \longrightarrow & T(f, g) \end{array}$$

Uwaga. Stożek zredukowany (homotopijne kowłókno) punktowanego przekształcenia $f: A \rightarrow B$ jest homeomorficzny z homotopijnym koekwalizatorem f i przekształcenia stałego w b_0 .

Zad. 82. Włożenie $\bar{i}: B \rightarrow T(f, g)$ ma następujące własności:

- $\bar{i} \circ f \sim \bar{i} \circ g$,
- dla dowolnego $h: B \rightarrow Z$ spełniającego $h \circ f \sim h \circ g$ istnieje (niekoniecznie dokładnie jedno) rozszerzenie $\bar{h}: T(f, g) \rightarrow Z$ takie, że $\bar{h} \circ \bar{i} = h$.
- Dla dowolnej przestrzeni Z poniższy ciąg jest dokładny:

$$[T(f, g), Z]_* \xrightarrow{\bar{i}^*} [B, Z]_* \xrightarrow[g^*]{f^*} [A, Z]_*.$$

Definicja 5.6. *Homotopijny ekwalizator* dwóch punktowanych przekształceń $f, g: A \rightarrow B: p: F(f, g) \rightarrow A$ definiujemy jako pull-back w kategorii \mathcal{T}_* :

$$\begin{array}{ccc} F(f, g) & \longrightarrow & P(B) \\ \downarrow p & & \downarrow (p_0, p_1) \\ A & \xrightarrow{f \times g} & B \times B \end{array}$$

Zad. 83. Projekcja $p : F(f, g) \rightarrow A$ ma następujące własności:

- $f \circ p \sim g \circ p$,
- dla dowolnego $h : Z \rightarrow A$ spełniającego $f \circ h \sim g \circ h$ istnieje (niekoniecznie dokładnie jedno) podniesienie $\tilde{h} : Z \rightarrow F(f, g)$.
- Dla dowolnej przestrzeni Z poniższy ciąg jest dokładny:

$$[Z, F(f, g)]_* \xrightarrow{p\#} [Z, A]_* \xrightarrow[g\#]{f\#} [Z, B]_*$$

Przykład. Dla $id : A \rightarrow A$ mamy homeomorfizm $T(id, id) \simeq A \times S^1/a_0 \times S^1$, stąd dla dowolnego f , $T(f, f)$ nazywane bywa *torusem* przekształcenia f .

Zad. 84. Skonstruować naturalne odwzorowanie $T(f, g) \rightarrow \text{Coeq}(f, g)$ gdzie Coeq oznacza koekwalizator w kategorii przestrzeni punktowanych (czyli kogranicę diagramu $A \xrightarrow[f]{g} B$) oraz $\text{Eq}(f, g) \rightarrow F(f, g)$, gdzie Eq oznacza ekwalizator w kategorii punktowanych przestrzeni topologicznych (czyli granicę diagramu $A \xrightarrow[f]{g} B$).

Zad. 85. *Homotopijnym pushout'em* dwóch odwzorowań $f_i : A \rightarrow X_i$ dla $i = 1, 2$ nazwamy homotopijny koekwalizator przekształceń $f_i : A \rightarrow X_1 \vee X_2$. Mamy następujący homotopijnie przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow \bar{f}_2 \\ X_2 & \xrightarrow{\bar{f}_1} & T(f_1, f_2) \end{array}$$

z następującą słabą własnością uniwersalną: Dla każdej pary punktowanych przekształceń $g_i : X_i \rightarrow Z$ takich, że $g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$ istnieje przekształcenie $g : T(f, g) \rightarrow Z$ takie, że $g \circ \bar{f}_i \sim g_i$. Jeśli jedno z przekształceń f_i jest korozwłóknieniem, to rzutowanie z homotopijnego pushoutu na zwykły pushout (p. zad. 84) przekształceń jest homotopijną równoważnością.

Zad. 86. Zdefiniować homotopijny pull-back i udowodnić analogiczne własności jak w zad. 85.

5.3 Funktory półdokładne

Definicja 5.7. Funktor kontrawariantny $F : \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$, określony na kategorii homotopii przestrzeni z wyróżnionym punktem o wartościach w kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem, nazywa się *półdokładny* jeśli

- (MV) Dla dowolnych dwóch przekształceń $f, g : X \rightarrow Y$ functor F przeprowadza ciąg $X \rightrightarrows Y \xrightarrow{i} T(f, g)$ na ciąg dokładny

$$F(T(f, g)) \rightarrow F(Y) \rightrightarrows F(X)$$

tzn. taki, że jeśli $F(f)(y) = F(g)(y)$ to istnieje element $t \in F(T(f, g))$ taki, że $F(j)(t) = y$.

- (Add) Dla dowolnej rodziny przestrzeni $\{X_j\}_{j \in J}$ homomorfizm obcięcia $F(\bigvee_J X_j) \rightarrow \prod_J F(X_j)$ jest izomorfizmem.

Przykład 6. Najważniejszymi funktorami półdokładnymi są funktory reprezentowalne na kategorii \mathcal{T}_{*h} , czyli dla ustalonej przestrzeni punktowanej Y zadane formułą: $F(X) := [X, Y]_*$. Każdy functor półdokładny, ograniczony do potkategorii "porządných" przestrzeni punktowanych (CW-kompleksów - p. Rozdz. 5) jest reprezentowalny.⁹

Uwaga. Jeśli F ma wartości w kategorii grup abelowych, to warunek (MV) można zastąpić warunkiem, że dla dowolnego przekształcenia $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C(f)$ ciąg $F(C(f)) \xrightarrow{F(i)} F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$ jest dokładny.

Zad. 87. Zdefiniować kowariantne funktory półdokładne- najważniejszy przykład kowariantny functor reprezentowalny na \mathcal{T}_{*h}

Uwaga 2. Dla dowolnego kontrawariantnego funktora $F: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ spełniającego warunek *Add* i homotopijnej kogrupy X kodziałanie $\nu: X \rightarrow X \vee X$ definiuje działanie grupowe $F(\nu): F(X) \times F(X) \rightarrow F(X)$. Podobnie dla dowolnej homotopijnej grupy Y i funktora kowariantnego $G: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ zachowującego produkty działanie $\mu: Y \times Y \rightarrow Y$ definiuje działanie grupowe $G(\mu): G(Y) \times G(Y) \rightarrow G(Y)$.

Uwaga 3. Jeśli nie prowadzi to do nieporozumien, wartość funktora kontrawariantnego na morfizmie f będziemy oznaczali f^* a kowariantnego f_* , lub $f_{\#}$ w przypadku kowariantnych funktorów na \mathcal{T}_{*h} .

Twierdzenie 5.8. *Niech $f: A \rightarrow B$ będzie punktowanym przekształceniem.*

1. *Dla kontrawariantnego funktora półdokładnego $F: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ poniższy ciąg zbiorów z wyróżnionym punktem (zwany kontrawariantnym ciągiem Puppe) dokładny:*

$$\dots \rightarrow F(\Sigma C(f)) \xrightarrow{(\Sigma i)^*} F(\Sigma B) \xrightarrow{(\Sigma f)^*} F(\Sigma A) \xrightarrow{\delta^*} F(C(f)) \xrightarrow{i^*} F(B) \xrightarrow{f^*} F(A)$$

2. *Dla kowariantnego funktora półdokładnego $G: \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ poniższy ciąg zbiorów z wyróżnionym punktem (zwany kowariantnym ciągiem Puppe) jest dokładny:*

$$\dots \rightarrow G(\Omega F(f)) \xrightarrow{\Omega p_{\#}} G(\Omega A) \xrightarrow{\Omega f_{\#}} G(\Omega B) \xrightarrow{\partial_{\#}} G(F(f)) \xrightarrow{p_{\#}} G(A) \xrightarrow{f_{\#}} G(B)$$

Dowód. Ciągi otrzymujemy stosując funktory F i G do ciągów Puppe z Twierdzenia 5.4 i korzystając z definicji funktorów półdokładnych. \square

Zauważmy, że w ostatnim twierdzeniu wykorzystywaliśmy własność (MV) z definicji funktora półdokładnego jedynie w przypadku, gdy odwzorowanie g jest stałe. Teraz opiszemy, kiedy dla elementów $x, x' \in F(C(f))$, $i^*(x) = i^*(x') \in F(B)$, wykorzystując w dowodzie warunek (MV) w większej ogólności.

Zacniemy od zdefiniowania homotopijnego kodziałania ΣA na przestrzeni $C(f)$, czyli odwzorowania

$$C(f) \xrightarrow{\nu} C(f) \vee \Sigma A \subset C(f) \times \Sigma A$$

wzorem $\nu(b) = (b, [a_0, 1])$ oraz $\nu([a, t]) = ([a, 2t], [a_0, 1])$ dla $0 \leq t \leq 1/2$ oraz $\nu([a, t]) = (b_0, [a, 2t - 1])$ dla $1/2 \leq t \leq 1$.

⁹p. E. H. Spanier **Topologia Algebraiczna**, Rozdz. 7, gdzie funktory półdokładne nazywają się funktorami homotopijnymi.

Zad. 88. Podać definicję homotopijnego kodziałania homotopijnej kogrupy S na przestrzeni punktowanej X , czyli sformułować odpowiednie warunki na odwzorowanie $\nu : X \rightarrow X \vee S$ oraz zauważyć, że dla dowolnego kontrawariantnego funktora $F : \mathcal{T}_{*h} \rightarrow \mathcal{S}_*$ spełniającego warunek *Add* odwzorowanie $\nu^* : F(X) \times F(S) \rightarrow F(X)$ jest działaniem grupy $F(S)$ na zbiorze $F(X)$. Sprawdzić, że $C(f) \xrightarrow{\nu} C(f) \vee \Sigma A$ jest homotopijnym kodziałaniem.

Stwierdzenie 5.1. Dla dowolnego $f : A \rightarrow B$ i kontrawariantnego funktora półdokładnego F odwzorowanie indukowane przez zdefiniowane powyżej $\nu : C(f) \rightarrow C(f) \vee \Sigma A$ definiuje działanie grupy $F(\Sigma A)$ na $F(C(f))$. Dla elementów $c, c' \in F(C(f))$ zachodzi równość $F(i)(c) = F(i)(c') \in F(B)$ wtedy i tylko wtedy gdy c, c' należą do tej samej orbity działania grupy $F(\Sigma A)$.

Dowód. Pokażemy najpierw, że jeśli $c' = ca$ dla $a \in F(\Sigma A)$ to $F(i)(c) = F(i)(c')$. Niech $j : C(f) \rightarrow C(f) \vee \Sigma A$ będzie włożeniem. Odwzorowania indukowane $F(j) : F(C(f)) \times F(\Sigma A) \rightarrow F(C(f) \vee \Sigma A)$ jest projekcją na pierwszy czynnik $F(C(f))$. Z definicji ν mamy, że $\nu \circ i = j \circ i$ a więc dla dowolnego elementu $(c, a) \in F(C(f)) \times F(\Sigma A)$ zachodzi równość: $F(i)(ca) := F(i)F(\nu)(c, a) = F(i)F(j)(c, a) = F(i)(c)$.

Pokażemy teraz, że jeśli $F(i)(c) = F(i)(c')$ to istnieje element $a \in F(\Sigma A)$ taki, że $c' = F(\nu)(c, a)$. Zauważmy, że istnieje homotopijna równoważność $h : T(\nu, j) \rightarrow C(f) \vee \Sigma A$ taka, że następujący diagram jest homotopijnie przemienny: [udowodnić]

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{i} & C(f) \\
 \downarrow i & & \downarrow \bar{i} \\
 C(f) & \xrightarrow{\bar{i}} & T(\nu, j) \\
 & \searrow j & \searrow h \\
 & & C(f) \vee \Sigma A
 \end{array}$$

ponieważ F jest funktorem na \mathcal{T}_{*h} więc $F(h) : F(C(f) \vee \Sigma A) \xrightarrow{\cong} F(T(\nu, j))$ i diagram

$$\begin{array}{ccc}
 F(Y) & \xleftarrow{i^*} & F(C(f)) \\
 \uparrow i^* & & \uparrow j^* \\
 F(C(f)) & \xleftarrow{\nu^*} & F(C_f) \times F(\Sigma A)
 \end{array}$$

jest "słabym" push-out'em zbiorów: tzn. jeśli $F(i)(c) = F(i)(c')$ to istnieje element (c'', a) taki, że $F(j)(c'', a) = c'' = c$ oraz $F(\nu)(c, a) = ca = c'$. \square

Zad. 89. Odwzorowanie δ^* w kontrawariantnym ciągu Puppe jest dane wzorem $\delta^*(a) = c_0 a$ gdzie $c_0 \in F(C(f))$ jest punktem wyróżnionym.

Zad. 90. Skonstruować homotopijne działanie $\mu : \Omega B \times F(f) \rightarrow F(f)$ i udowodnić odpowiednik ostatniego stwierdzenia dla kowariantnego ciągu Puppe.

Kontrawariantny ciąg Puppe zastosowany do homotopijnego push-out'u nazywa się *ciągami dokładnym Mayera-Vietoris*¹⁰ i odgrywa olbrzymią rolę w topologii algebraicznej. Absolwentom Topologii II powinien się kojarzyć z twierdzeniem van Kampena.

¹⁰Leopold Vietoris (Radkersburg 1891 – 2002 Innsbruck)

Wniosek 5.1. Dla funktora półdokładnego F o wartościach w kategorii grup abelowych i homotopijnego pushoutu

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & X_1 \\ \downarrow f_2 & & \downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & T \end{array}$$

istnieje ciąg dokładny Mayera-Vietorisa

$$F(A) \xleftarrow{f_1^* - f_2^*} F(X_1) \oplus F(X_2) \xleftarrow{(i_1^*, i_2^*)} F(T) \leftarrow F(\Sigma A) \xleftarrow{(\Sigma f_1)^* - (\Sigma f_2)^*} F(\Sigma X_1) \oplus F(\Sigma X_2) \leftarrow \dots$$

gdzie $i_n: X_n \rightarrow X$ są inkluzjami.

Następny wniosek wiąże wartości funktora półdokładnego na bukiecie, produkcie i smash-produkcie dwóch przestrzeni.

Wniosek 5.2. Niech $i_k: X_k \rightarrow X_1 \vee X_2$, $p_k: X_1 \vee X_2 \rightarrow X_k$ dla $k = 1, 2$ oznaczają włożenia i rzutowania i F będzie funktorem półdokładnym o wartościach w grupach abelowych. Wtedy istnieje ciąg dokładny

$$0 \rightarrow F(X_1 \wedge X_2) \rightarrow F(X_1 \times X_2) \rightarrow F(X_1) \times F(X_2) \rightarrow 0.$$

Dowód. Zadanie. Wskazówka: Przekształceniem odwrotnym do izomorfizmu obciążenia $(F(i_1), F(i_2)): F(X_1 \vee X_2) \cong F(X_1) \times F(X_2)$ jest $F(p_1) + F(p_2)$. □

Z ostatniego wniosku wynika kolejny, uogólniający wcześniejsze zadania o zawieszeniu produktu sfer:

Wniosek 5.3. Dla dowolnych przestrzeni X, Y istnieje homotopijna równoważność

$$\Sigma(X \times Y) \sim \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y).$$

5.4 Granica systemu odwrotnego grup i jej funktor pochodny

Zad. 91. Granica odwrotna $\lim\{A_i\}$ ciągu grup (niekoniecznie abelowych!) $G_1 \xleftarrow{p_2} G_2 \xleftarrow{p_3} G_3 \xleftarrow{p_4} \dots$ (traktowanego jako funktor) jest naturalnie izomorficzna ekwalizatorowi homomorfizmów

$$\prod_i G_i \xrightarrow[p]{id} \prod_i G_i$$

gdzie $p(g_1, g_2, g_3, \dots) := (p_1(g_2), p_2(g_3), \dots)$.

W przypadku gdy $G_i = A_i$ są abelowe, granica $\lim\{A_i\}$ jest izomorficzna z jądrem $\prod_i A_i \xrightarrow{\mu} \prod_i A_i$, gdzie $\mu(a_1, a_2, a_3, \dots) := (a_1 - p_2(a_2), a_2 - p_3(a_3), a_3 - p_4(a_4), \dots)$.

Definicja 5.9 (Funktory pochodny granicy odwrotnej $\lim^1\{G_i\}$). Definiujemy działanie grupy $\prod_i G_i$ na zbiorze $\prod_i G_i$ wzorem

$$(g_1, g_2, g_3, \dots) * (h_1, h_2, h_3, \dots) := (g_1 h_1 p_2(g_2)^{-1}, g_2 h_2 p_3(g_3)^{-1}, g_3 h_3 p_4(g_4)^{-1}, \dots)$$

i definiujemy $\lim^1\{A_i\}$ jako zbiór orbit tego działania z punktem wyróżnionym, którym jest orbita $[e, e, \dots]$. Morfizm ciągów grup $\{G_i \rightarrow H_i\}$ indukuje odwzorowanie funktorów pochodnych $\lim^1\{G_i\} \rightarrow \lim^1\{H_i\}$.

Zad. 92. Wykazać, że jeśli $G_i = A_i$ są grupami abelowymi, to $\lim^1\{A_i\} \simeq \text{coker}(\mu) = (\prod_i A_i)/\mu(\prod_i A_i)$, a więc jest grupą abelową i mamy ciąg dokładny:

$$0 \longrightarrow \lim\{A_i\} \longrightarrow \prod_i A_i \xrightarrow{\mu} \prod_i A_i \longrightarrow \lim^1\{A_i\} \longrightarrow 0.$$

Zad. 93. Rozpatrzmy ciąg grup abelowych $A_1 \xleftarrow{p_2} A_2 \xleftarrow{p_3} A_3 \xleftarrow{p_4} \dots$. Udowodnij następujące fakty:

- jeśli $\exists i_0 \forall i > i_0$ homomorfizm p_i jest izomorfizmem, to $\lim\{A_i\} \cong A_{i_0}$ oraz $\lim^1\{A_i\} = 0$,
- jeśli $\exists i_0 \forall i > i_0$ homomorfizmy p_i są epimorfizmami, to $\lim^1\{A_i\} = 0$,
- jeśli $\forall i \exists n_i$ takie, że $\forall N, N' > n_i$ zachodzi równość obrazów $\text{im}\{G_{i+N} \rightarrow G_i\} = \text{im}\{G_{i+N'} \rightarrow G_i\}$, to $\lim^1\{A_i\} = 0$,
- usunięcie początkowych wyrazów ciągu nie zmienia $\lim\{A_i\}$ oraz $\lim^1\{A_i\}$; ogólniej, jeśli zastąpimy ciąg $\{G_i\}$ dowolnym jego podciągiem $\{G_{n_k}\}$, to \lim oraz \lim^1 pozostaną takie same.

5.5 Lemat Milnora

Zad. 94. Dla ciągu odwzorowań $\mathbf{f} := \{X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots\}$ zdefiniujemy jego *teleskop* jako $\text{Tel}(\mathbf{f}) := X_1 \times [0, 1] \cup_{f_1} X_2 \times [1, 2] \cup_{f_2} \dots$; (w przypadku punktowanym ściągamy do punktu tworzącą przechodzącą przez punkt wyróżniony x_0 .) Jeśli wszystkie odwzorowania są korozwłótnieniami to rzutowanie $\text{Tel}(f) \rightarrow \text{colim}\{X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots\}$ jest homotopijną równoważnością.

Zad. 95. Niech X_i oraz Tel będą jak wyżej, przy czym rozpatrujemy teleskop punktowany.

- T jest homotopijnym pushoutem diagramu: T_1, T_2 ,

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_i X_i & \xrightarrow{f^{odd}} & \bigvee_i X_{2i+1} \\ \downarrow f^{ev} & & \downarrow \\ \bigvee_i X_{2i} & \longrightarrow & T \end{array} \quad (2)$$

- Homotopijny koekwalizator włożenia $\bigvee_i X_i \hookrightarrow T$ jest homotopijnie równoważny z $T/(\bigvee_i X_i) \simeq \bigvee_i \Sigma X_i$
- jeśli F jest kontrawariantnym funktorem półdokładnym, to przekształcenie w ciągu Mayera-Vietorisa (Zad. 5.1) $F(\bigvee_i X_{2i+1}) \oplus F(\bigvee_i X_{2i}) \rightarrow F(\bigvee_i X_i)$ w ciągu Mayera-Vietorisa (Zad. 5.1) jest dane wzorem

$$(a_1, a_3, \dots) \oplus (a_2, a_4, \dots) \mapsto (a_1 - F(f_1)(a_2), -a_2 + F(f_2)(a_3), a_3 - F(f_3)(a_4), \dots)$$

gdzie $a_j \in F(X_j)$ oraz $f_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$.

Twierdzenie 5.10. [Lemat Milnora ¹¹] Niech X_i oraz Tel będą jak w zadaniu 94. Dla dowolnego kontrawariantnego funktora półdokładnego F istnieje krótki ciąg dokładny zbiorów z wyróżnionym punktem:

$$0 \rightarrow \lim^1 F(\Sigma X_i) \rightarrow F(\text{Tel}) \rightarrow \lim F(X_i) \rightarrow 0.$$

Dowód. Zadanie. Wsk. Wykorzystaj ciąg Mayera-Vietorisa dla pary T_1, T_2 . □

¹¹John Willard Milnor (Orange, NJ (USA) 1931 –)

6 Grupy homotopii, homotopijne równoważności CW-kompleksów

6.1 Absolutne grupy homotopii

W badaniu zbiorów klas homotopii $[X, Y]_*$ i homotopijnych równoważności szczególną rolę odgrywają funktory kowariantne na kategorii homotopii punktowanych przestrzeni topologicznych \mathcal{T}_{*h} , reprezentowane przez sfery $(S^n, 1)$ dla $n = 1, 2, \dots$ zwane funktorami grup homotopii.

Definicja 6.1. Dla $n = 0, 1, 2, \dots$ na kategorii \mathcal{T}_{*h} funktor kowariantny reprezentowany przez sferę $(S^n, 1)$ oznaczamy $\pi_q(X, x_0) := [(S^q, 1), (X, x_0)]_*$ i dla $n > 0$ nazywamy n -tą grupą homotopii przestrzeni punktowanej (X, x_0) , a dla $n = 1$ także grupą podstawową. $\pi_0(X, x_0)$ jest zbiorem z wyróżnionym punktem.

Przypomnijmy, że zbiory $[S^q, X]_*$ posiadają strukturę grupową, bowiem na sferze S^n istnieje komnożenie $\nu : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$. Dla $n = 1$ jest ono zadane dobrze znanym wzorem:

$$\nu(z) = \begin{cases} (z^2, 1) & \text{gdy } \text{Im}(z) \geq 0 \\ (1, z^2) & \text{gdy } \text{Im}(z) \leq 0 \end{cases} .$$

Dla zdefiniowania komnożenia $\nu : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ dla sfer wyżej wymiarowych korzystamy z ustalonego homeomorfizmu $S^n \simeq \Sigma^{n-1}S^1$ i przemienności zawieszenia zredukowanego z sumą bukietową. Ko-jednościami jest oczywiście odwzorowanie stałe $(S^n, 1) \rightarrow (S^n, 1)$.

Stwierdzenie 6.1. *Funktory π_n mają wartości kategorii grup, a dla $n \geq 2$ w kategorii grup abelowych.*

Dowód. Dowód wynika natychmiast z Rozdz.1.8 zad.21 i Rozdz. 1.6 zad. 25. □

Ponieważ $S^q \simeq D^q/S^q$ więc elementy $\pi_q(X, x_0)$ można utożsamiać z klasami homotopii $[(D^q, S^{q-1}), (X, x_0)]$, czyli odwzorowaniami z dysku stałymi na sferze, lub dzięki homeomorfizmowi $(I^q, \partial I^q) \simeq (D^q, S^{q-1})$ z $[(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$, czyli odwzorowaniami określonymi na kostce, stałymi na jej brzegu.

Zad. 96. Zdefiniować wprost działanie w zbiorze $[(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$ i zdefiniować izomorfizm grup $\pi_q(X, x_0) \simeq [(I^q, \partial I^q), (X, x_0)]$. Pokazać wprost, że to działanie dla $q \geq 2$ jest przemienne.

Zad. 97. Dla dowolnych punktowanych przestrzeni X, Y projekcje na współrzędne

$$Y \longleftarrow X \times Y \longrightarrow X$$

zadają izomorfizm grup

$$\pi_q(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_q(X, x_0) \times \pi_q(Y, y_0).$$

Opisać izomorfizm odwrotny.

Zad. 98. Dla dowolnej H -przestrzeni G , w szczególności grupy topologicznej, grupa podstawowa $\pi_1(G, e)$ jest przemienna.

Definicja 6.2. Niech n będzie liczbą naturalną. Odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ nazywamy n -równoważnością jeśli $\forall_{x \in X} f_{\sharp} : \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x))$ jest izomorfizmem grup homotopii dla $q < n$ i epimorfizmem dla $q = n$. Przestrzeń punktowana nazywa się n -spójna, jeśli włożenie punktu wyróżnionego jest n -równoważnością, czyli $\pi_q(X, x_0) = 0$ dla $q \leq n$.

6.2 Punktowane i wolne klasy homotopii

W praktyce geometrycznej interesują nas homotopijne równoważności przestrzeni, a wyróżnianie punktu ma charakter techniczny, ułatwiając wprowadzanie pomocniczych struktur algebraicznych. W tym rozdziale zbadamy relacje między zbiorami klas homotopii przy różnych wyborach punktu wyróżnionego oraz zbiorem punktowanych klas homotopii i wolnych klas homotopii. Niech (X, x_0) będzie ustalona, przestrzenią dobrze punktowaną ¹², a Y dowolną przestrzenią. Niech $\Pi(Y)$ oznacza grupoid podstawowy przestrzeni Y ¹³

Stwierdzenie 6.2. *Przyporządkowanie $\Pi(Y) \ni y \rightsquigarrow [(X, x_0), (Y, y)] \in \mathcal{S}_*$ wyznacza functor kontrawariantny z grupoidu podstawowego do kategorii zbiorów z wyróżnionym punktem. Jeśli (X, x_0) jest homotopijną kogrupą, to ma on wartości w kategorii grup.*

Dowód. Punktem wyróżnionym w zbiorze $[(X, x_0), (Y, y)]$ jest klasa przekształcenia stałego w $y \in Y$. Dla dowolnej drogi $\omega : I \rightarrow X$ łączącej y_0 z y_1 zdefiniujemy odwzorowanie

$$h_{[\omega]} : [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_1)].$$

Mając dane $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zdefiniujemy $F : X \times 0 \cup x_0 \times I \rightarrow Y$ wzorem: $F(x, 0) := f(x)$ oraz $F(x_0, t) := \omega(t)$. Korzystając z tego, że przestrzeń jest dobrze punktowana możemy rozszerzyć F do homotopii $\bar{F} : X \times I \rightarrow Y$. Definiujemy $h_{[\omega]}[f] := [\bar{F}|X \times 1]$. Pozostaje sprawdzić, że definicja $h_{[\omega]}$ nie zależy od dokonanych wyborów, że $h_{[\omega]}$ jest homomorfizmem grup oraz $h_{[\omega \circ \eta]} = h_{[\eta]} \circ h_{[\omega]}$. \square

Wniosek 6.1. *Dla dowolnej drogi ω w Y odwzorowanie $h_{[\omega]} : [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_1)]$ jest bijekcją, w szczególności zadaje izomorfizm grup homotopii $h_{[\omega]} : \pi_q(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} \pi_q(Y, y_1)$.*

Stwierdzenie 6.3. *Niech (Z, z_0) będzie przestrzenią punktowaną i $F : Z \times I \rightarrow Y$ będzie homotopią. Oznaczmy $\omega(t) := F(z_0, t)$ oraz $\omega(0) = y_0$ i $\omega(1) = y_1$. Następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{array}{ccc} & & [(X, x_0), (Y, y_0)] \\ & \nearrow f_{\#} & \downarrow h_{[\omega]} \\ [(X, x_0), (Z, z_0)] & \xrightarrow{f_{\#}} & [(X, x_0), (Y, y_1)] \end{array}$$

Wniosek 6.2. *Jeśli $f : Y \rightarrow Y'$ jest homotopijną równoważnością (niepunktowaną!), to odwzorowanie indukowane $f_{\#} : [(X, x_0), (Y, y_0)] \rightarrow [(X, x_0), (Y', f(y_0))]$ jest bijekcją, w szczególności grupy homotopii łukowo spójnych przestrzeni homotopijnie równoważnych są izomorficzne (niezależnie od wyboru punktów wyróżnionych).*

Następny wniosek jest pożytecznym kryterium trywialności elementu w grupach homotopii, który warto też udowodnić bezpośrednio nie odwołując się do powyższych twierdzeń.

Wniosek 6.3. *Dla odwzorowania $\alpha : (S^q, 1) \rightarrow (X, x_0)$ następujące warunki są równoważne:*

1. $[\alpha] = 0$ w $\pi_q(X, x_0)$;
2. $\alpha \sim c_{x_0} \text{ rel } (1)$ (c_{x_0} oznacza odwzorowanie stałe w x_0);

¹²Tzn. włożenie $\{x_0\} \hookrightarrow X$ jest korozwłoknieniem

¹³A.Bojanowska, S.Jackowski Topologia II, Rozdział 4

3. $\alpha \sim c_{x_0}$;

4. α rozszerza się na dysk tzn. $\exists \bar{\alpha} : D^{q+1} \rightarrow X$ takie, że $\bar{\alpha}|S^q = \alpha$.

Ustalmy teraz punkt wyróżniony $y_0 \in Y$. Odwzorowania $h_{[\omega]}$ zadają działanie grupy $\pi_1(Y, y_0)$ na zbiorze klas homotopii $[(X, x_0), (Y, y_0)]$:

$$[(X, x_0), (Y, y_0)] \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow [(X, x_0), (Y, y_0)].$$

Zad. 99. Jeśli $(X, x_0) = (S^1, 1)$ to powyższe działanie jest działaniem grupy $\pi_1(Y, y_0)$ na niej samej przez automorfizmy wewnętrzne.

Zad. 100. Zauważyć, że powyższe działanie jest indukowane przez kodziałanie $\nu : X \rightarrow X \vee S^1$ kogrupy S^1 na przestrzeni X skonstruowane w następujący sposób: Definiujemy odwzorowanie $X \times 0 \cup x_0 \times I \rightarrow X \vee S^1$ jako identyczność na $X \times 0$ i nawinięcie odcinka $x_0 \times I$ na okrąg. Ponieważ (X, x_0) jest dobrze punktowana więc to odwzorowanie rozszerza się do $X \times I \rightarrow X \vee S^1$, którego obcięcie do górnej podstawy $X \times 1$ jest kodziałaniem $\nu : X \rightarrow X \vee S^1$.

Stwierdzenie 6.4. Jeśli przestrzeń Y jest łukowo spójna, to zapominanie o punkcie wyróżnionym zadaje bijekcję:

$$[(X, x_0), (Y, y_0)]/\pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\cong} [X, Y].$$

Stwierdzenie 6.5. Jeśli (Y, y_0) jest H -przestrzenią, to dla dowolnej przestrzeni (X, x_0) działanie $\pi_1(Y, y_0)$ na zbiorze $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ jest trywialne.

Dowód. Niech $\mu : Y \times Y \rightarrow Y$ będzie (homotopijnym) mnożeniem w Y oraz $[f] \in [(X, x_0), (Y, y_0)]$ a $[\omega] \in \pi_1(Y, y_0)$. Wzór $H(x, t) := \mu(f(x), \omega(t))$ definiuje homotopię między f a f , która na tworzącej $\{x_0\} \times I$ jest drogą $[\omega]$. Wynika stąd, że $h_{[\omega]}[f] = [f]$. \square

6.3 Relatywne grupy homotopii

Grupy homotopii mogą być zdefiniowane dla dowolnego odwzorowania $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ jako

$$\pi_q(f, x_0) := \pi_{q-1}(F(f), (x_0, \omega_{y_0})).$$

Zauważmy, że $\pi_q(f, x_0)$ jest grupą dla $q \geq 2$, abelową dla $q \geq 3$.

Ponieważ dowolne odwzorowanie można homotopijnie zastąpić korozwłóknieniem, szczególnie ważny jest przypadek gdy f jest włożeniem podzbioru. Niech (X, A, a_0) będzie punktowaną parą tzn $a_0 \in A \hookrightarrow X$. Definiujemy $\pi_q(X, A, a_0) := \pi_{q-1}(F(\hookrightarrow), (a_0, \omega_{a_0}))$. Z definicji homotopijnego włókna:

$$F(\hookrightarrow) = \{\omega \in P(X) \mid \omega(0) \in A, \omega(1) = a_0\}.$$

Grupy relatywne pary mają też bardziej geometryczną interpretację w terminach odwzorowań dysków w X [RYSUNEK]:

Stwierdzenie 6.6. Istnieje naturalna bijekcja zbiorów $\pi_q(X, A, a_0) \simeq [(D^q, S^{q-1}, 1), (X, A, a_0)]$.

Dowód. Zauważmy, że z definicji

$$\text{Map}_*(S^{q-1}, F(\hookrightarrow)) \subset \text{Map}_*(S^{q-1}, \text{Map}_*(I^+, X)) \simeq \text{Map}_*(S^{q-1} \wedge I^+, X)$$

oraz

$$S^{q-1} \wedge I^+ \simeq S^{q-1} \times I/\{1\} \times I$$

Obrazem $\text{Map}_*(S^{q-1}, F(\hookrightarrow))$ w $\text{Map}_*(S^{q-1} \times I/1 \times I)$ jest podzbiór

$$\begin{aligned} & \{f : (S^{q-1} \times I \rightarrow X \mid f(1 \times I) = a_0, f(S^{q-1} \times 1) = a_0, f(S^{q-1} \times 0) \subset A\} \simeq \\ & \simeq \text{Map}_*(\alpha : S^{q-1} \times I/S^{q-1} \times 0 \rightarrow X \mid f(1, t) = a_0, f(S^{q-1} \times 0) \subset A) \simeq \\ & \simeq \text{Map}_*(\alpha : D^q \rightarrow X \mid f(1, t) = a_0, f(S^{q-1}) \subset A) \end{aligned}$$

Po przejściu do klas homotopii, pamiętając, że włożenie odcinka $I \subset D^q \simeq S^{q-1} \times I/S^{q-1} \times 0$ jest korozwłóknieniem, otrzymujemy bijekcję:

$$\pi_q(X, A, a_0) \simeq [(S^{q-1}, 1), (F(\hookrightarrow), (a_0, \omega_{a_0}))] \simeq [(D^q, S^{q-1}), (X, A, a_0)].$$

□

Wniosek 6.4. $\pi_q(X, a_0, a_0) \simeq \pi_q(X, a_0)$

Zad. 101. Opisać strukturę grupową w terminach odwzorowań $(D^q, S^{q-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$, tak żeby bijekcja w Stwierdzeniu 6.6 była izomorfizmem grup.

Zad. 102. Element $[\alpha : (D^q, S^{q-1}, 1) \rightarrow (X, A, a_0)] \in \pi_q(X, A, a_0)$ jest trywialny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje homotopia $H : (D^q, S^{q-1}) \times I \rightarrow (X, A)$ taka, że $H(p, 0) = \alpha(p)$ oraz $\forall p \in D^q H(p, 1) \in A$.

Zad. 103. Opisać strukturę grupową w zbiorze klas homotopii przekształceń $[(I^q, \partial I^q, \partial_1 I^q), (X, A, a_0)]$ gdzie I^q jest kostka q -wymiarową a $\partial_1 I^q := \partial I^q \setminus \text{Int}(I^{q-1}) \times \{1\}$ [RYSUNEK] tak, aby zachodził izomorfizm grup

$$\pi_q(X, A, a_0) \simeq [(I^q, \partial I^q, \partial_1 I^q), (X, A, a_0)].$$

Relatywne grupy homotopii są funktorem zdefiniowanym na kategorii punktowanych par przestrzeni topologicznych. Projekcja na przestrzeń ilorazową $X \rightarrow X/A$ zadaje naturalną transformację funktorów $\pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X/A, [a_0])$, która jednak na ogół nie jest izomorfizmem (nawet dla par Borsuka!).

Podobnie jak w przypadku absolutnym, omówimy zależność relatywnych grup homotopii $\pi_q(X, A, a)$ od wyboru punktu wyróżnionego $a \in A$. Dla dowolnej drogi $\omega : I \rightarrow A$ można zdefiniować homomorfizm $h_{[\omega]} : \pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X, A, a_1)$ następującym wzorem, w którym punkty dysku D^q są parametryzowane punktem sfery S^{q-1} oraz odległością od środka, czyli odcinkiem I [RYSUNEK]:

$$h_{[\omega]}[\alpha](p, t) := \begin{cases} \alpha(p, 2t) & \text{gdy } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega(2t - 1) & \text{gdy } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Stwierdzenie 6.7. *Przyporządkowanie $\Pi(A) \ni a \rightsquigarrow \pi_q(X, A, a) \in \mathcal{S}_*$ wyznacza funktor kontrawariantny z grupoidu podstawowego podprzestrzeni A do kategorii grup.*

Z ostatniego stwierdzenia wynika natychmiast, że homomorfizmy $h_{[\omega]} : \pi_q(X, A, a_0) \rightarrow \pi_q(X, A, a_1)$ są izomorfizmami oraz grupa $\pi_1(A, a_0)$ działa na grupach $\pi_q(X, A, a_0)$.

6.4 CW-kompleksy

Definicja 6.3. Przestrzeń topologiczna Hausdorffa nazywamy CW-kompleksem jeśli jest w niej wyróżniony wstępujący ciąg podprzestrzeni domkniętych: $X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots$ taki, że $X = \bigcup X^{(n)}$ i topologia w X jest słaba ze względu na podprzestrzenie $X^{(n)}$. Podprzestrzenie $X^{(n)}$, zwane *szkieletami* powstają przez doklejanie do poprzedniej dysków n -wymiarowych wzdłuż brzegu (sfery), a dokładniej:

- $X^{(0)}$ jest przestrzenią dyskretną,
- $\forall n$ istnieje zbiór (dyskretny) J_n oraz $\chi : S^n \times J_{n+1} \rightarrow X^{(n)}$ takie, że istnieje homeomorfizm $(D^{n+1} \times J_{n+1}) \cup_\chi X^{(n)} \simeq X^{(n+1)}$ rel $X^{(n)}$.

Składowe spójne zbioru $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ nazywają się *n -wymiarowymi komórkami* kompleksu X . CW-kompleks X jest *n -wymiarowy* jeśli n jest najmniejszą liczbą taką, że w X nie ma komórek m -wymiarowych dla $m > n$.

Jeśli X, Y są CW-kompleksami to przekształcenie ciągłe $f : X \rightarrow Y$ nazywamy *komórkowym* jeśli $\forall n f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$. Kategorię CW-kompleksów i przekształceń komórkowych oznaczamy *CW*.

Uwaga 4. $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)} = \coprod_{j \in J_n} C_j$ gdzie $C_j \simeq \text{Int } D^n$ tzn. każda składowa jest homeomorficzna z wnętrzem n -wymiarowego dysku, a domknięcie składowej \bar{C}_j w X jest homeomorficzne z $\bar{\chi}_j(D^n)$ gdzie $\bar{\chi}_j : D^n \rightarrow X^{(n)}$ jest rozszerzeniem $\chi_j : S^{n-1} \rightarrow X^{(n-1)}$. Odwzorowanie χ_j nazywa się odwzorowaniem doklejającym komórkę C_j a $\bar{\chi}_j$ odwzorowaniem charakterystycznym komórki C_j .

Definicja 6.4. Podkompleksem $A \subset X$ nazywamy taki podzbiór domknięty, że filtracja $A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset \dots \subset A^{(n)} \subset \dots$ gdzie $A^{(n)} := A \cap X^{(n)}$ spełnia warunki 1. i 2. z definicji CW-kompleksu.

W szczególności szkielety są oczywiście podkompleksami w X .

Uwaga 5. Z definicji podkompleksu wynika, że $A^{(n)} \setminus A^{(n-1)} = (X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}) \cap A$ jest sumą pewnej rodziny n -wymiarowych komórek w $X^{(n)}$.

Zachodzi następujące ważne twierdzenie o aproksymacji komórkowej, które udowodnimy w Rozdziale 7:

Twierdzenie 6.5. *Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem CW-kompleksów, $A \subset X$ podkompleksem na którym f jest komórkowe, to istnieje komórkowe odwzorowanie $g : X \rightarrow Y$ takie, że $f \sim g$ rel A .*

Twierdzenie 6.6. *Włożenie podkompleksu w CW-kompleks jest parą Borsuka.*

Stwierdzenie 6.8. *Jednowymiarowy spójny CW-kompleks jest homotopijnie równoważny z bukietem okręgów. Spójny CW-kompleks jest homotopijnie równoważny z kompleksem posiadającym tylko jedną 0-wymiarową komórkę.*

Dowód. Jeśli X jest spójnym CW kompleksem, to jego 1-szkielet $X^{(1)}$, który jest grafem - musi być spójny (dlaczego?). Wybierzmy drzewo maksymalne w tym grafie $T \subset X^{(1)}$. Rozważmy projekcję $q : X \rightarrow X/T$. Przestrzeń $Y := X/T$ jest CW-kompleksem, w którym $Y^{(0)} = pt$ a $Y^{(1)}$ jest bukietem okręgów. Ponieważ włożenie $T \subset X^{(1)}$ jest korozwłóknieniem, więc q jest homotopijną równoważnością. \square

Wniosek 6.5. *Punktowany, spójny CW-kompleks X jest homotopijnie równoważny z punktowanym CW-kompleksem Y takim, że $Y^{(0)} = y_0$ oraz wszystkie odwzorowania doklejające komórki są punktowane, czyli $\chi : \bigvee_{j \in J_{n+1}} (S^n, 1) \rightarrow (Y^{(n)}, y_0)$.*

Powyższy wniosek ma ważne uogólnienie:

Stwierdzenie 6.9. *Punktowany, k -spójny CW-kompleks X jest homotopijnie równoważny z punktowanym CW-kompleksem Y takim, że $Y^{(k)} = \{y_0\}$ oraz wszystkie odwzorowania doklejające komórki są punktowane, czyli $\chi : \bigvee_{j \in J_{n+1}} (S^n, 1) \rightarrow (Y^{(n)}, y_0)$.*

Dowód. Postępujemy indukcyjnie. Dla $n = 0$ twierdzenie zostało udowodnione. Załóżmy, że dla $q < n$ zbudowaliśmy równoważność homotopijną $X \sim Y_q$ gdzie $Y_q^{(q)} = \{y_0\}$. Skonstruujemy kompleks Y_{q+1} oraz homotopijną równoważność $Y_q \rightarrow Y_{q+1}$. Zauważmy, że szkielet Y_q^{q+1} jest homeomorficzny z bukietem sfer $\bigvee_j S^{q+1}$, przy czym włożenie $\bigvee_j S^{q+1} \hookrightarrow X$ jest ściągające, a więc rozszerza się do przekształcenia $f : \bigvee_j D^{q+2} \rightarrow X$. Na mocy twierdzenia o aproksymacji komórkowej 9.9 możemy założyć, że $\bigvee_j S^{q+1} \hookrightarrow X^{(q+1)}$. Doklemy dyski $\bigvee_j D^{q+3}$ do X przy pomocy odwzorowania f określonego na dolnych półsferach S_-^{q+2} ograniczających poszczególne D^{q+3} . Otrzymana w ten sposób przestrzeń Y'_{q+1} jest CW-kompleksem: dodajemy komórki w wymiarach $q + 2$ i $q + 3$. Zauważmy, że $Y'_q \bigvee_j S_+^{q+1} \subset Y'_{q+1}$ oraz $\bigvee_j S_+^{q+1}$ jest podkompleksem ściągającym [RYSUNEK]. Definiujemy $Y_{q+1} := Y'_{q+1} / \bigvee_j S_+^{q+1}$. Szukana homotopija równoważność jest dana jako złożenie $Y_q \hookrightarrow Y'_{q+1} \rightarrow Y_{q+1}$. Zadbanie o punktowane odwzorowania doklejające pozostawiamy Czytelnikowi. \square

Na zakończenie wspomnimy o nietrudnym, ale pożytecznym pojęciu *relatywnego CW-kompleksu*.

Definicja 6.7. Relatywny CW-kompleks to para (X, A) gdzie $A \subset X$ jest domkniętą podprzestrzenią oraz wyróżniony wstępujący ciąg podprzestrzeni domkniętych: $(X, A)^{(0)} \subset (X, A)^{(1)} \subset \dots \subset (X, A)^{(n)} \subset \dots \subset X$ taki, że $X = \bigcup (X, A)^{(n)}$ i topologia w X jest słaba ze względu na podprzestrzenie $(X, A)^{(n)}$. Podprzestrzenie $(X, A)^{(n)}$, zwane *szkieletami* powstają przez doklejanie do poprzedniej dysków n -wymiarowych wzdłuż brzegu (sfery). W szczególności $(X, A)^{(0)} = A \amalg V$, gdzie V jest przestrzenią dyskretną (wierzchołki CW-kompleksu (X, A)).

Uwaga 6. Jeśli $A \subset X$ jest podkompleksem CW-kompleksu X , to para (X, A) jest relatywnym CW-kompleksem, dla której $(X, A)^{(n)} = X^{(n)} \cup A$.

6.5 Twierdzenie J.H.C. Whiteheada

Twierdzenie 6.8. *Niech n będzie liczbą naturalną. Jeśli transformacja naturalna funktorów półdokładnych $\Phi : F \rightarrow G$ jest taka, że $\Phi(S^k)$ jest bijekcją dla $0 < k < n$ oraz surjekcją dla $k = n$, to $\Phi(X)$ jest bijekcją dla każdego spójnego CW-kompleksu wymiaru $< n$ oraz surjekcją jeśli $\dim X = n$.*

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem odgrywającym kluczową rolę w wielu dowodach w topologii algebraicznej.

Lemat 6.1 (Lemat o 5 Odwzorowaniach). *Niech będzie dany przemienny diagram zbiorów punktowanych i punktowanych przekształceń, w którym wiersze są dokładne:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 G_5 & \xrightarrow{\alpha_5} & G_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & S_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & S_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & S_1 \\
 \downarrow \gamma_5 & & \downarrow \gamma_4 & & \downarrow \gamma_3 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_1 \\
 G'_5 & \xrightarrow{\alpha'_5} & G'_4 & \xrightarrow{\alpha'_4} & S'_3 & \xrightarrow{\alpha'_3} & S'_2 & \xrightarrow{\alpha'_2} & S'_1
 \end{array}$$

oraz

1. Dla $i = 4, 5$, G_i, G'_i są grupami i γ_4, γ_5 są homomorfizmami grup;
2. G_4 działa na S_3 , G'_4 działa na S'_3 ;
3. γ_3 i γ_4 jest ekwiwariantne tzn. $\gamma_3(g_4 s_3) = \gamma_4(g_4) \gamma_3(s_3)$;
4. $\alpha_3(s_3) = \alpha_3(t_3)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\exists g_4 \in G_4$ taki, że $s_3 = g_4 t_3$;
5. $\alpha'_3(s'_3) = \alpha'_3(t'_3)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\exists g'_4 \in G'_4$ taki, że $s'_3 = g'_4 t'_3$.

Wtedy

1. Jeśli γ_2 and γ_4 są surjeksjami a γ_1 jest injekcją, to γ_3 jest surjeksją;
2. Jeśli γ_2 and γ_4 są injeksjami, $\forall s_3 \in S_3$, $\gamma_4: (G_4)_{s_3} \rightarrow (G'_4)_{\gamma_3(s_3)}$ jest epimorfizmem, γ_5 jest surjeksją, to γ_3 jest injekcją.

Dowód. Dla $i \in \{1, 2, 3\}$ oznaczamy punkty bazowe $*_i \in S_i$, $*'_i \in S'_i$.

Dowód Tezy 1. Dla danego $s'_3 \in S'_3$ musimy znaleźć $s_3 \in S_3$ taki, że $\gamma_3(s_3) = s'_3$. Niech $\alpha'_3(s'_3) = s'_2$. Ponieważ γ_2 jest surjeksją, istnieje $s_2 \in S_2$ taki, że $\gamma_2(s_2) = s'_2$. Z dokładności dolnego ciągu mamy $\alpha'_2(s'_2) = *'_1$. Ponieważ γ_1 jest injekcją, to $\alpha_2(s_2) = *_1$, a więc $\exists t_3 \in S_3$ taki, że $\alpha_3(t_3) = s_2$. Stąd $\alpha'_3(\gamma_3(t_3)) = \alpha'_3(s'_3)$. Założenie 5 gwarantuje, że $\exists g'_4 \in G'_4$ taki, że $g'_4 \gamma_3(t_3) = s'_3$. Ponieważ γ_4 jest epimorfizmem, więc $\exists g_4 \in G_4$ $\gamma_4(g_4) \gamma_3(t_3) = s'_3 = \gamma_3(g_4 t_3)$. Stąd $g_4 t_3 = s_3$.

Dowód Tezy 2. Niech $s_3, t_3 \in S_3$ będą takie, że $\gamma_3(t_3) = \gamma_3(s_3) = s'_3$. Z przemienności diagramuotrzymujemy, że: $\alpha'_3 \gamma_3(t_3) = \alpha'_3 \gamma_3(s_3)$ i $\gamma_2 \alpha_3(t_3) = \gamma_2 \alpha_3(s_3)$. Ponieważ γ_2 jest injekcją $\alpha_3(t_3) = \alpha_3(s_3)$ i dlatego $\exists g_4 \in G_4$ $t_3 = g_4 s_3$. Stąd $\gamma_4(g_4) \gamma_3(s_3) = \gamma_3(g_4 s_3) = \gamma_3(t_3) = \gamma_3(s_3)$. Założenie dodane w Tezie 2. daje implikacje:

$$\gamma_4(g_4) \in (G'_4)_{s'_3} \Rightarrow g_4 \in (G_4)_{s_3} \Rightarrow s_3 = t_3.$$

□

Dowód Twierdzenia 6.8. Dowodzimy twierdzenie przez indukcję ze względu na wymiar CW-kompleksu X .

Jeśli $\dim X \leq 1$, to X jest homotopijnie równoważny z bukietem okręgów (Stw. 6.8), a więc $\Phi(X)$ jest bijekcją (odp. surjeksją).

Niech $\dim X = q$ dla $1 < q \leq n$. Na mocy Wniosku 6.9 $X \sim C(f)$ gdzie $f: \bigvee_{J_q} S^{q-1} \rightarrow X^{q-1}$. Oznaczmy bukiet $B^{q-1} := \bigvee_{J_q} S^{q-1}$. Rozpatrzmy morfizm kontrawariantnych ciągów Puppe indukowany przez transformację Φ :

$$\begin{array}{ccccccccc} F(\Sigma X^{q-1}) & \xrightarrow{\Sigma f^*} & F(\Sigma B^{q-1}) & \xrightarrow{q^*} & F(X) & \xrightarrow{i^*} & F(X^{q-1}) & \xrightarrow{f^*} & F(B^{q-1}) \\ \Phi(\Sigma X^{q-1}) \downarrow & & \Phi(\Sigma B^{q-1}) \downarrow & & \Phi(X) \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow \\ G(\Sigma X^{q-1}) & \xrightarrow{\Sigma f^\#} & G(\Sigma B^{q-1}) & \xrightarrow{g^\#} & G(X) & \xrightarrow{i^\#} & G(X^{q-1}) & \xrightarrow{f^\#} & G(B^{q-1}) \end{array}$$

żeby wywnioskować, że środkowe odwzorowanie jest izomorfizmem (odp. epimorfizmem) skorzystamy z Lematu o Pięciu 6.1. Na mocy twierdzenia o kontrawariantnym ciągu Puppe oba poziome ciągi spełniają warunki 1-5.

Surjektywność $\Phi(X)$. Ponieważ $1 < q \leq n$ więc $\Phi(\Sigma B^{q-1})$ na mocy założenia jest surjekcją, a $\Phi(X^{q-1})$ oraz $\Phi(B^{q-1})$ są bijekcjami. Zatem z konkluzji 1. Lematu o Pięciu 6.1 wynika, że $\Phi(X)$ jest surjekcją.

Injektywność $\Phi(X)$. Zakładamy, że $1 < q \leq n-1$ więc $\Phi(\Sigma B^{q-1})$, $\Phi(X^{q-1})$, $\Phi(B^{q-1})$ są bijekcjami a $\Phi(\Sigma X^{q-1})$ jest surjekcją. Wystarczy zatem pokazać, że jeśli $\Phi(X)(x^*) = x^\#$ to

$$\Phi(\Sigma B^{q-1}): F(\Sigma B^{q-1})_{x^*} \xrightarrow{\cong} G(\Sigma B^{q-1})_{x^\#}.$$

W tym celu skorzystamy z opisu grup izotropii. Niech $X \xrightarrow{\nu, j} X \vee \Sigma B^{q-1}$ będzie odpowiednio ko-działaniem i włożeniem X . Niech

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{\nu} \\ \xrightarrow{j} \end{array} X \vee \Sigma B^{q-1} \xrightarrow{j} T(\nu, i)$$

będzie homotopijnym ko-ekwalizatorem tych odwzorowań. Wtedy

$$\text{Im } F(j) = \{(x, a) \in F(X) \times F(\Sigma B^{q-1}) \mid xa = x\}$$

oraz mamy przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccccc} F(T(\nu, i)) & \xrightarrow{F(j)} & F(X) \times F(\Sigma B^{q-1}) & \xrightarrow{F(\nu), F(i)} & F(X) \\ \Phi(T) \downarrow & & \downarrow \Phi(X) \times \Phi(\Sigma B^{q-1}) & & \downarrow \\ G(T(\nu, i)) & \xrightarrow{F(j)} & G(X) \times G(\Sigma B^{q-1}) & \xrightarrow{G(\nu), G(i)} & G(X) \end{array}$$

Na mocy założenia indukcyjnego $\Phi(T)$ jest surjekcją. Stąd wynika, że $\Phi(X) \times \Phi(\Sigma B^{q-1})$ przeprowadza epimorficznie $\text{Im } F(j)$ na $\text{Im } G(j)$, co należało wykazać. \square

Twierdzenie 6.9. [J.H.C. Whitehead¹⁴] Niech $f : Y \rightarrow Z$ będzie n -równoważnością ($1 \leq n \leq \infty$). Wtedy dla dowolnego CW-kompleksu X odwzorowanie indukowane

$$f_\# : [X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$$

jest surjekcją jeśli $\dim X \leq n$ oraz jest injekcją jeśli $\dim X < n$. W szczególności jeśli Y, Z są spójnymi CW-kompleksami i $n = \infty$, to f jest homotopijną równoważnością.

Zad. 104. W przypadku skończenia wymiarowych, wywnioskuj tw. Whiteheada z tw. 6.8. Zauważ, że zgodnie z tym twierdzeniem wystarczy zakładać, że $f_\#$ jest izomorfizmem skończenie wielu wymiarach!

Poniżej podamy inny dowód twierdzenia Whiteheada 6.9 obejmujący przypadek, gdy $n = \infty$. Zaczniemy od ważnego i z innych powodów twierdzenia o podnoszeniu odwzorowań ze względu na rozwłóknienia, których włókna mają trywialne grupy homotopii wnieskich wymiarach.

¹⁴John Henry Constantine Whitehead (Chennai (Indie) 1904 – 1960 Princeton (USA))

Twierdzenie 6.10. Załóżmy, że $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ jest rozwłóknieniem takim, że $\pi_k(F, e_0) = 0$ dla $k < n$. Niech (X, A) będzie relatywnym CW-kompleksem wymiaru $\leq n$. Wtedy włożenie $j : A \hookrightarrow X$ jest lewo-prostopadłe do $E \xrightarrow{p} B$ (tzn. dowolny przemienny kwadratowy diagram jak niżej ma przekątną):

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & E \\ j \downarrow & \tilde{f} \nearrow & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \end{array}$$

Lemat 6.2. Jeżeli dla każdego $q \leq n \leq \infty$ Twierdzenie 6.10 zachodzi dla pary dysk-sfera (D^q, S^{q-1}) , to zachodzi dla dowolnego relatywnego CW-kompleksu (X, A) wymiaru $\leq n$.

Dowód twierdzenia 6.10. Na mocy Lematu wystarczy wykazać twierdzenie dla pary $(X, A) = (D^q, S^{q-1})$ gdzie $q \leq n$. W tym celu rozpatrzmy rozwłóknienie indukowane (pull-back): $\tilde{f}^* E \xrightarrow{p'} D^n$. Odwzorowanie $f : S^{q-1} \rightarrow E$ definiuje przekrój $s : S^{q-1} \rightarrow \tilde{f}^* E$ rozwłóknienia p' nad sferą S^{q-1} , dane wzorem $s(x) := (x, f(x))$. Rozszerzenie tego przekroju na dysk D^q wyznaczy podniesienie \tilde{f} .

Ponieważ dysk jest przestrzenią ściągającą, więc na mocy Rozdz. 3 Tw. 7.3 rozwłóknienie nad nią jest homotopijnie włókniste trywialne, czyli istnieje włóknista homotopijna równoważność:

$$\begin{array}{ccc} D^q \times F & \xrightleftharpoons[g]{h} & \tilde{f}^* E \\ p_1 \searrow & & \swarrow p' \\ & D^q & \end{array}$$

Złożenie $g \circ s : S^{q-1} \rightarrow D^q \times F$ jest przekrojem, a więc jest postaci: $(g \circ s)(x) = (x, \alpha(x))$ gdzie $\alpha : S^{q-1} \rightarrow F$. Ponieważ $\pi_k(F, e_0) = 0$ dla $k < n$ a więc α rozszerza się do odwzorowania dysku $\bar{\alpha} : D^q \rightarrow F$ i wzór $\bar{s}(x) = (x, \bar{\alpha}(x))$ zadaje rozszerzenie $g \circ s$. Złożenie $h \circ \bar{s}$ jest przekrojem p' nad dyskiem takim, że $\bar{s}|_{S^{q-1}} = h \circ g \circ s$ i to niekoniecznie jest równe s , ale włóknista homotopia $h \circ g \sim_{D^q} id_{\tilde{f}^* E}$ definiuje włóknistą homotopię przekrojów $\bar{s}|_{S^{q-1}} \sim_{D^q} s$, którą oznaczmy $H : S^{q-1} \times I \rightarrow \tilde{f}^* E$. Rozpatrzmy diagram:

$$\begin{array}{ccc} D^q \times 0 \cup S^{q-1} \times I & \xrightarrow{\bar{H}} & \tilde{f}^* E \\ j \downarrow & \tilde{p}_D \nearrow & \downarrow p' \\ D^q \times I & \xrightarrow{p_D} & D^q \end{array}$$

w którym p_D jest rzutowaniem na dysk, j - włożeniem ("pustej szklanki w pełną"), a $\bar{H}(x, 0) := \bar{s}(x)$, $\bar{H}(z, t) := H(z, t)$ Ponieważ p' jest rozwłóknieniem istnieje podniesienie \tilde{p}_D . Szukane rozszerzenie przekroju s jest dane wzorem: $\hat{s}(x) := \tilde{p}_D(x, 1)$. \square

Dowód twierdzenia Whiteheada 6.9. Niech $f : Y \rightarrow Z$ będzie n -równoważnością ($1 \leq n \leq \infty$). Zastępując przestrzeń Y kowalcem można zakładać, że f jest rozwłóknieniem z włóknem oznaczonym F . Z długiego ciągu dokładnego rozwłóknienia wnioskujemy, że założenie iż f jest n -równoważnością jest równoważne zanikaniu grup homotopii włókna: $\pi_k(F, x_0) = 0$ dla $k < n$.

Trzeba pokazać, że dla CW-kompleksu X odwzorowanie indukowane $f_{\#} : [X, Y]_* \rightarrow [X, Z]_*$ jest surjekcją jeśli $\dim X \leq n$ oraz jest injekcją jeśli $\dim X < n$.

Dla pokazania surjektywności $f_{\#}$ zastosujemy twierdzenie 6.10 do CW-pary (X, x_0) i dowolnego $k : X \rightarrow Z$:

$$\begin{array}{ccc} \{x_0\} & \xrightarrow{k} & Y \\ \downarrow & \nearrow \tilde{k} & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{k} & Z \end{array}$$

Oczywiście $f_{\#}([\tilde{k}]) = [f \circ \tilde{k}] = [k]$. Załóżmy teraz, że $\dim X < n$ przypuśćmy teraz, że $f_{\#}([\tilde{k}]) = f_{\#}([\tilde{k}'])$. Niech $H : X \times I \rightarrow Z$ będzie punktowaną homotopią $f \circ \tilde{k} \sim f \circ \tilde{k}'$. Zastosujemy tw. 6.10 do CW-pary $(X \times I, S)$ gdzie $S := X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I \cup X \times \{1\}$

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\tilde{k} \cup y_0 \cup \tilde{k}'} & Y \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{H} & \downarrow f \\ X \times I & \xrightarrow{H} & Z \end{array}$$

Podniesienie $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$ jest szukaną homotopią $\tilde{k} \sim \tilde{k}'$. □

7 Zadania różne

7.1 Homotopie punktowane

Zad. 105. Niech $(X, x_0), (Y, y_0)$ będą łukowo spójnymi przestrzeniami z wyróżnionym punktem i niech X będzie dobrze punktowana. Pokazać, że:

1. Każde przekształcenie $f : X \rightarrow Y$ jest homotopijne z przekształceniem $g : X \rightarrow Y$, takim że $g(x_0) = y_0$.
2. podać przykład przestrzeni i dwóch homotopijnych przekształceń $f, g : X \rightarrow Y$, takich że $g(x_0) = f(x_0) = y_0$, ale nie istnieje homotopia zachowująca punkt bazowy.
3. Pokazać, że jeżeli Y jest także dobrze punktowana i $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ jest homotopijną równoważnością, to f jest homotopijną równoważnością z zachowaniem punktu bazowego.

Zad. 106. Jeżeli (X, x_0) jest przestrzenią dobrze punktowaną to jej zawieszenie zredukowane i niezredukowane przestrzeni są homotopijnie równoważne.

Zad. 107. Jeżeli X jest łukowo spójna i pary (X, x_0) i (X, x_1) są dobrze punktowane, to istnieje homotopijna równoważność $f : (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$.

Zad. 108. a Jeżeli (X, x_0) jest dobrze punktowaną H -przestrzenią z działaniem $\mu : X \times X \rightarrow X$, to istnieje działanie $\mu', \mu' \sim \mu$ i $\mu'(x, x_0) = \mu'(x_0, x) = x$ dla dowolnego $x \in X$. (to znaczy każde H-działanie z homotopijną jedyneką możemy z dokładnością do homotopii zastąpić przez działanie, które ma ścisłą jedynekę).

7.2 Lemat o pięciu homomorfizmach

Zad. 109. Z Lematu 6.1 wywnioskuj lemat o 5 homomorfizmach w kategorii grup. Rozważamy przemienny diagram grup i ich homomorfizmów, w którym wiersze są ciągami dokładnymi:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 G_5 & \xrightarrow{\alpha_5} & G_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & G_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & G_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & G_1 \\
 \downarrow \gamma_5 & & \downarrow \gamma_4 & & \downarrow \gamma_3 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_1 \\
 G'_5 & \xrightarrow{\alpha'_5} & G'_4 & \xrightarrow{\alpha'_4} & G'_3 & \xrightarrow{\alpha'_3} & G'_2 & \xrightarrow{\alpha'_2} & G'_1
 \end{array}$$

Wtedy

1. Jeśli γ_2, γ_4 są epimorfizmami i γ_1 jest monomorfizmem to γ_3 jest epimorfizmem;
2. Jeśli γ_2, γ_4 są monomorfizmami i γ_5 jest epimorfizmem, to γ_3 jest monomorfizmem.

8 Ciągi dokładne grup homotopii

8.1 Ciąg dokładny rozwłóknienia i ciąg dokładny pary

Niech $f : A \rightarrow B$ będzie przekształceniem (dobrze) punktowanych przestrzeni. Podstawiając w kowariantnym ciągu Puppe $G(-) := [S^0, -]_*$ otrzymujemy długi ciąg homotopii odwzorowania f :

$$\begin{aligned}
 & \dots \rightarrow \pi_n(F(f), \bar{a}_0) \xrightarrow{i\#} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{f\#} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F(f), \bar{a}_0) \xrightarrow{i\#} \dots \\
 & \dots \xrightarrow{\partial} \pi_1(F(f), \bar{a}_0) \xrightarrow{i\#} \pi_1(A, a_0) \xrightarrow{p\#} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, \bar{a}_0) \xrightarrow{i\#} \pi_0(A, a_0) \xrightarrow{p\#} \pi_0(B, b_0).
 \end{aligned}$$

gdzie $\bar{a}_0 := (a_0, \omega_{b_0}) \in F(f)$ jest punktem wyróżnionym.

Definiując grupy homotopii przekształcenia $\pi_q(f) := \pi_{q-1}(F(f), \bar{a}_0)$ możemy ten ciąg przepisać w postaci:

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(f) \xrightarrow{\delta} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{f\#} \pi_n(B, b_0) \rightarrow \pi_n(f, \bar{a}_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(A, a_0) \xrightarrow{f\#} \dots$$

Długi ciąg dokładny grup homotopii odwzorowania ma dwa bardzo ważne szczególne przypadki: gdy odwzorowanie jest włożeniem podzbioru $A \hookrightarrow X$ oraz gdy jest rozwłóknieniem $E \xrightarrow{p} B$.

Twierdzenie 8.1 (Ciąg dokładny pary). *Dla dowolnej punktowanej pary $X \supset A \ni a_0$ istnieje długi ciąg homotopii*

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\delta} \pi_n(A, a_0) \xrightarrow{i\#} \pi_n(X, b_0) \xrightarrow{j\#} \pi_n(X, A, a_0) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(A, a_0) \xrightarrow{f\#} \dots$$

gdzie $(A, a_0) \xrightarrow{i} (X, a_0) \xrightarrow{j} (X, A, a_0)$

Dowód. Wynika natychmiast z definicji grup relatywnych i ciągu Puppe. □

Niech $F := p^{-1}(b_0) \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ będzie teraz punktowym rozwłóknieniem. Ponieważ w przypadku rozwłóknienia włókno homotopijne jest homotopijnie równoważne z przeciwobrazem punktu, a więc włóknisty ciąg Puppe ma postać:

$$\dots \xrightarrow{\partial} \Omega F \rightarrow \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\partial} F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$$

Twierdzenie 8.2 (Ciąg dokładny rozwłóknienia). *Dla punktowanego rozwłóknienia $E \xrightarrow{p} B$ istnieje długi ciąg dokładny:*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_n(E) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i_{\#}} \dots \\ \dots \xrightarrow{p_{\#}} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_0(B, b_0) \end{aligned}$$

Grupa $\pi_1(B, b_0)$ działa na zbiorze $\pi_0(F, e_0)$ a przekształcenie $\pi_0(F, e_0)/\pi_1(F, e_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_0(E, e_0)$ jest różnowartościowe.

Odnotujmy kilka bardzo prostych, lecz ważnych wniosków z ciągu dokładnego rozwłóknienia:

Wniosek 8.1. *Niech $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ będzie rozwłóknieniem nad łukowo spójną przestrzenią B .*

- *Jeśli $\pi_q(F, e_0) = 0$ dla każdego $q \geq n$ to $p_{\#}: \pi_q(E, e_0) \rightarrow \pi_q(B, b_0)$ jest izomorfizmem dla $q > n$ i monomorfizmem dla $q = n$;*
- *Jeśli $\pi_q(E, e_0) = 0$ dla każdego $q \geq n$ to $\partial: \pi_q(B, b_0) \rightarrow \pi_{q-1}(F, e_0)$ jest izomorfizmem dla $q > n$ i monomorfizmem dla $q = n$;*
- *Jeśli $\pi_q(B, b_0) = 0$ dla każdego $q \geq n$ to $i_{\#}: \pi_q(F, e_0) \rightarrow \pi_q(E, e_0)$ jest izomorfizmem dla $q > n$ i monomorfizmem dla $q = n$.*

Zad. 110. Sformułować analogiczny wniosek w przypadku gdy znikają grupy homotopii w niskich wymiarach.

Jeśli co trzeci homomorfizm w długim ciągu dokładnym jest zerowy, to długi ciąg dokładny rozpada się na krótkie ciągi dokładne. Np. jeśli $i_{\#}: \pi_q(F, e_0) \rightarrow \pi_q(E, e_0)$ jest trywialny dla wszystkich $q \geq 0$, to dla każdego $n > 0$ otrzymujemy ciąg dokładny:

$$0 \rightarrow \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow 0.$$

Stwierdzenie 8.1. *Niech $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ będzie rozwłóknieniem. Jeśli włożenie $F \hookrightarrow E$ jest homotopijne z przekształceniem stałym, to dla każdego $n > 1$ ciąg*

$$0 \rightarrow \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_{\#}} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow 0.$$

jest dokładny i rozszczepialny. W szczególności $\pi_n(B, b_0) \cong \pi_n(E, e_0) \times \pi_{n-1}(F, e_0)$ oraz $\pi_1(F, e_0)$ jest abelowa.

Dowód. Zadanie. Wsk. Homotopia $H: F \times I \rightarrow E$ definiuje homomorfizm rozszczepiający $\pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \pi_n(B, b_0)$. □

Zad. 111. Przenalizować ciąg rozwłóknienia w przypadku gdy $p: E \rightarrow B$ jest nakryciem i w tych terminach zrekonstruować twierdzenia o grupach homotopii nakryć znane z Topologii II ¹⁵. W szczególności korzystając z nakrycia $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ wykazać, że $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ oraz $\pi_q(S^1, 1) = 0$ dla $q > 0$.

¹⁵A.Bojanowska, S.Jackowski Topologia II

8.2 Grupy homotopii sfer, przestrzeni rzutowych i grup liniowych

Grupy homotopii sfer S^n (poza przypadkiem $n = 1$) i przestrzeni pokrewnych są dalece nietrywialne i stanowią jedną z największych zagadek topologii. W następnym rozdziale udowodnimy:

Twierdzenie 8.3. $\pi_i(S^n, 1) = 0$ dla $i < n$ oraz $\pi_n(S^n, 1)$ jest wolną grupą abelową generowaną przez $[id : S^n \rightarrow S^n]$, a więc $\pi_n(S^n, 1) \simeq \mathbb{Z}$.

Pokażemy teraz jak rozwłóknienia służą znajdowaniu nietrywialnych odwzorowań sfer.

Ważne przykłady nietrywialnych odwzorowań sfer są definiowane przy pomocy struktur mnożek (mnożenia) na przestrzeniach kartezjańskich. Okazuje się, że dwuliniowe mnożenie można "sensownie" zdefiniować w \mathbb{R}^n tylko w przypadkach, gdy $n = 1, 2, 4, 8$. To twierdzenie jest jednym ze spektakularnych osiągnięć topologii algebraicznej. poniżej fragment z materiałów do wykładu z Topologii Algebraicznej I w języku angielskim:

A structure of a normed associative and commutative \mathbb{R} -algebra (i.e. a sensible multiplication) can be defined only on the cartesian spaces \mathbb{R}^n for $n = 1, 2$ where $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ - real numbers, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ - complex numbers (pairs of real numbers.) A structure of an associative but not commutative \mathbb{R} -algebra can be defined for $n = 4$ on pairs of complex numbers $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ - quaternions. Further, if we omit the associativity assumption, then a \mathbb{R} -bilinear multiplication can be defined for $n = 8$ on pairs of quaternions $\mathbb{R}^8 = \mathbb{O}$ -octonions. Moreover, we have inclusions of \mathbb{R} -algebras $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}$ and a conjugation on \mathbb{O} restricts to the usual conjugation of quaternions and complex numbers. A norm on \mathbb{O} is defined as usual $\|o\|^2 = oo^*$ thus $\|oo'\| = \|o\|\|o'\|$. If $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ then any cartesian space \mathbb{F}^n carries a structure of an \mathbb{F} -module (vector space) via multiplications of coordinates and an \mathbb{F} -valued (hermitian) scalar product is defined in the usual way: $(v, w) := \sum v_i w_i^*$, where $*$ denotes conjugation. Vectors of length 1 constitute a group for $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ and an H -space for $\mathbb{F} = \mathbb{O}$ (i.e. multiplication is not associative, but associative up to homotopy) .

Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ i oznaczmy $d_{\mathbb{F}} := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$. Jednopunktowe uzwarcenie \mathbb{F} będziemy utożsamiać ze sferą $S^{d_{\mathbb{F}}}$. Definiujemy odwzorowania $S^{2d_{\mathbb{F}}-1} \xrightarrow{p_{\mathbb{F}}} \mathbb{F} \cup \{\infty\} \simeq S^{d_{\mathbb{F}}}$ są zadane przez dzielenie par elementów odpowiedniego ciała: $p_{\mathbb{F}}(x_1, x_2) := x_1/x_2$. Przeciwobrazy punktów przy odwzorowaniach $p_{\mathbb{F}}$ są homeomorficzne ze sferami $S^{d_{\mathbb{F}}-1}$. Odwzorowania $p_{\mathbb{F}}$ są nazywane *wiązkami Hopfa* ¹⁶.

Zad. 112. $p_{\mathbb{R}}$ jest homeomorficzne z dwukrotnym nakryciem $p_2 : S^1 \rightarrow S^1$, $p_2(z) = z^2$.

Zad. 113. Udowodnij, że wiązki Hopfa są lokalnie trywialne, a więc są rozwłóknieniami.

Zad. 114. Korzystając z ciągu dokładnego rozwłóknienia dla wiązek Hopfa i Stwierdzenia 8.1 wykaż następujące izomorfizmy grup homotopii sfer:

- $\pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$
- $\pi_i(S^3) \simeq \pi_n(S^2)$ dla $i \geq 3$, w szczególności $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ (wskazać generator $\pi_3(S^2)$?)
- $\pi_i(S^4) \simeq \pi_i(S^7) \oplus \pi_{i-1}(S^3)$ dla $i \geq 2$,
- $\pi_i(S^8) \simeq \pi_i(S^{15}) \oplus \pi_{i-1}(S^7)$ dla $i \geq 2$.

Wywnioskować stąd, że wiązki Hopfa nie są homotopijne z odwzorowaniami stałymi!

¹⁶Heinz Hopf (Graebchen k/Wrocławia 1894 – 1971 Zollikon k/Zurichu)

Dla ciał $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ grupa mnożyliwotywna \mathbb{F}^\times działa wolno na $\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\}$ przez mnożenie przez skalar na każdej współrzędnej. Definiujemy n -wymiarowa przestrzeń rzutową nad ciałem \mathbb{F} jako przestrzeń orbit tego działania: $\mathbb{F}P(n) := (\mathbb{F}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{F}^\times$. Zauważmy, że $S^{d_{\mathbb{F}}-1} \subset \mathbb{F}^\times$ jest podgrupą, mnożenie przez elementy $S^{d_{\mathbb{F}}-1}$ zachowuje normę, mamy więc $S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)d_{\mathbb{F}}-1}/S^{d_{\mathbb{F}}-1} = \mathbb{F}P(n)$.

Zad. 115. Rzutowanie na przestrzeń orbit $p_{\mathbb{F}}^n : S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{F}P(n)$ jest przekształceniem lokalnie trywialnym, a więc rozwłóknieniem.

Rozwłóknienia $p_{\mathbb{F}}^n : S^{d_{\mathbb{F}}(n+1)-1} \rightarrow \mathbb{F}P(n)$, których włóknami są sfery $S^{d_{\mathbb{F}}-1}$ pozwalają powiązać grupy homotopii sfer z grupami homotopii przestrzeni rzutowych.

Zad. 116. Oblicz $\pi_i(\mathbb{F}P(n))$ dla ciał $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ i "małych" i .

Zad. 117. Udowodnij, że $\pi_n(S^2) \cong \pi_n(S^3 \times \mathbb{C}P(\infty))$ dla każdego n . Udowodnij, że S^2 nie jest homotopijnie równoważne $S^3 \times \mathbb{C}P(\infty)$. Jak pogodzić ten przykład z twierdzeniem Whiteheada?

Dla ciał $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oznaczamy $GL(n, \mathbb{F})$ grupę macierzy odwracalnych a $O(n, \mathbb{F}) \subset GL(n, \mathbb{F})$ jej podgrupę składającą się z odwzorowań zachowujących normę (a więc iloczyn skalarny na $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i iloczyn hermitowski dla $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

Zad. 118. $O(n, \mathbb{F}) \subset GL(n, \mathbb{F})$ jest zwarta oraz jest silnym retraktem deformacyjnym. Wsk. Odwzorowanie odwrotne $GL(n, \mathbb{F}) \rightarrow O(n, \mathbb{F})$ jest dane przez ortonormalizację Gramma-Schmidta.

Definiujemy odwzorowania $ev : O(n, \mathbb{F}) \rightarrow S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$, $ev(A) := A(1, 0, \dots, 0)$. Istnieje homomorfizm $O(n, \mathbb{F})/O(n-1, \mathbb{F}) \simeq S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$ przy którym projekcja ilorazowa odpowiada odwzorowaniu ev .

Zad. 119. Odwzorowanie $ev : O(n, \mathbb{F}) \rightarrow S^{nd_{\mathbb{F}}-1}$ jest lokalnie trywialne, a zatem jest rozwłóknieniem. Wsk. Aby skonstruować trywializację wystarczy znaleźć przekrój ev nad $S^{nd_{\mathbb{F}}-1} \setminus \{v\}$.

Zad. 120. Grupa liniowa $GL(n, \mathbb{C})$ jest spójna, a $GL(n, \mathbb{R})$ ma dokładnie dwie składowe spójne.

Zad. 121. Niech $i : O(n-1, \mathbb{F}) \rightarrow O(n, \mathbb{F})$ będzie zanurzeniem grup zdefiniowanym przez naturalną inkluzję $\mathbb{F}^{n-1} \subset \mathbb{F}^n$. Wykaż, że i jest $(nd_{\mathbb{F}}-2)$ -równoważnością. Zauważ, że dla danej liczby $i > 0$ i dostatecznie dużej liczby n grupy $\pi_i(O(n, \mathbb{F}))$ nie zależą od n . Oblicz je dla "małych" i .

8.3 Przestrzenie Eilenberga-MacLane'a

Przestrzeniami Eilenberga¹⁷-MacLane'a¹⁸ nazywamy łukowo spójne przestrzenie, których tylko jedna grupa homotopii jest różna od zera. Dokładniej:

Definicja 8.4. Niech π będzie grupą a n liczbą naturalną. Łukowo spójna przestrzeń X jest przestrzenią Eilenberga-MacLane'a (EM) typu $K(\pi, n)$ jeśli $\pi_n(X, x_0) \simeq \pi$ oraz $\pi_q(X, x_0) = 0$ dla $q \neq n$. Mówimy, że łukowo spójna przestrzeń X jest przestrzenią Eilenberga-MacLane'a (EM) w wymiarze n jeśli X jest typu $K(\pi, n)$ dla pewnej grupy π .

Ponieważ grupy homotopii w wymiarze > 1 są przemienne, więc przestrzenie EM typu $K(\pi, n)$ dla $n > 1$ mogą istnieć tylko jeśli π jest abelowa.

¹⁷Samuel Eilenberg (Warszawa 1913 – 1998 New York)

¹⁸Saunders MacLane (Taftville, CN, USA 1909 – 2005 San Francisco)

Przykład 7. Przykłady poznanych przestrzeni EM:

- Okrąg S^1 jest przestrzenią EM typu $K(\mathbb{Z}, 1)$
- Rzeczywista nieskończenie wymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{R}P(\infty)$ jest przestrzenią EM typu $K(\mathbb{Z}_2, 1)$;
- Zespólna nieskończenie wymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{C}P(\infty)$ jest przestrzenią EM typu $K(\mathbb{Z}, 2)$.
- Jeśli X jest przestrzenią EM typu $K(\pi, n)$ to przestrzeń pętli ΩX jest przestrzenią EM typu $K(\pi, n - 1)$.

Uwaga. Przestrzeń rzutowa $\mathbb{H}P(\infty)$ nie jest przestrzenią EM. Dlaczego?

Zad. 122. Jeśli $p : \tilde{X} \rightarrow X$ jest nakryciem między łukowo spójnymi przestrzeniami i jedna z nich jest przestrzenią EM w wymiarze 1, to druga też jest. W szczególności dowolna powierzchnia M^2 (orientowalna lub nieorientowalna), poza sferą i płaszczyzną rzutową, jest przestrzenią typu $K(\pi_1(M), 1)$.

Uwaga. Dla każdej grupy π można skonstruować przestrzeń typu $K(\pi, 1)$ korzystając z prostych własności przestrzeni nakrywających. Wystarczy w tym celu znaleźć przestrzeń ściągającą $E\pi$ na której grupa π działa tak, aby projekcja na przestrzeń orbit $E\pi \rightarrow (E\pi)/\pi$ była nakryciem (a więc rozwłóknieniem). [Konstrukcja Milnora]

W Rozdziale 7 pokażemy jak zbudować przestrzenie EM także w wyższych wymiarach.

Jeśli dwa CW-kompleksy są typu $K(\pi, n)$ to są homotopijnie równoważne. W tym celu wykazemy [PÓŹNIEJ] ogólniejsze twierdzenie świetnie ilustrujące metodę konstruowania odwzorowań z CW-kompleksów.

Twierdzenie 8.5. Niech (X, x_0) będzie spójnym punktowanym CW-kompleksem, a (Y, y_0) przestrzenią punktowaną. Niech $n > 0$ będzie taką liczbą, że $\pi_i(X, x_0) = 0$ dla $i < n$ oraz $\pi_i(Y, y_0) = 0$ dla $i > n$. Wtedy przyporządkowanie

$$[X, Y]_* \ni f \rightsquigarrow f_{\#} \in \text{Hom}(\pi_n(X, x_0), \pi_n(Y, y_0))$$

jest bijekcją.

9 Klasyfikacja homotopijna odwzorowań

9.1 Odwzorowania w sfery

Wykażemy, że klasa homotopii odwzorowania z dowolnej przestrzeni w sferę zależy od jego zachowania w otoczeniu przeciwobrazu wybranego punktu. Jeśli pewien przeciwobraz jest pusty, to odwzorowanie jest ściągające, bowiem jego obraz jest zawarty w ściągającym zbiorze $S^n \setminus \{y_0\}$.

Twierdzenie 9.1. Niech X będzie przestrzenią parazwartą (np. metryzowalną), $F \subset X$ jej podzbiorem domkniętym a $f_0, f_1 : (X, X \setminus F) \rightarrow (S^n, S^n \setminus \{y_0\})$ dwoma odwzorowaniami takimi, że dla pewnego otoczenia $U \supset F$ obcięcia $f_0, f_1 : (U, U \setminus F) \rightarrow (S^n, S^n \setminus \{y_0\})$ są homotopijne. Wtedy $f_0, f_1 : (X, X \setminus F) \rightarrow (S^n, S^n \setminus \{y_0\})$ też są homotopijne (jako odwzorowania par!).

Dowód. Parę $(S^n, S^n \setminus \{y_0\})$ będziemy utożsamiać z parą $(\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \mathbb{R}^n)$, co ułatwi nam zapis homotopii. Niech $F_U : (U, U \setminus F) \times I \rightarrow (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \mathbb{R}^n)$ będzie homotopią par między $f_0|_U \sim f_1|_U$ a

$$F_{X \setminus F}(x, t) := (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$$

homotopią między $f_0|(X \setminus F) \sim f_1|(X \setminus F)$. Skleimy te dwie homotopie przy pomocy rozkładu jedności dla pokrycia $\{U, X \setminus F\}$. Niech $\phi, \psi : X \rightarrow I$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $\text{supp}(\phi) \subset U$, $\text{supp}(\psi) \subset X \setminus F$ oraz $\phi + \psi = 1$. Definiujemy homotopię $F_X : (X, X \setminus F) \times I \rightarrow (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}, \mathbb{R}^n)$:

$$F_X(x, t) := \begin{cases} \psi(x)F_U(x, t) + \phi(x)F_{X \setminus F}(x, t) & \text{dla } x \in X \setminus F \\ F_U(x, t) & \text{dla } x \notin \text{supp}(\psi) \end{cases}$$

Wzór ten definiuje ciągłą homotopię, gdyż jest na ciągła na otwartych podzbiorach $(X \setminus F) \times I$ i $(X \setminus \text{supp}(\psi)) \times I$ a także pokrywa się na ich części wspólnej. \square

9.2 Aproksymacja gładka

W tym rozdziale pokażemy, że badając klasy homotopii odwzorowań między rozmaitościami gładkimi wystarczy ograniczać się do odwzorowań gładkich oraz gładkich homotopii między nimi. Dzięki temu możemy korzystać z aparatu analizy matematycznej, a w szczególności aproksymować lokalnie odwzorowania przez ich pochodne, a więc odwzorowania liniowe.

Zacniemy od wykazania, że przekształcenia bliskie są homotopijne, co pozwoli na skorzystanie z twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji przekształceń ciągłych gładkimi.

Twierdzenie 9.2. *Niech $Y \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem posiadającym otoczenie otwarte $Y \subset U \subset \mathbb{R}^n$ retrahowalne na Y . Wtedy istnieje funkcja dodatnia $\epsilon : Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ taka, że jeśli dwa odwzorowania $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ są ϵ -bliskie tzn. $\forall x \in X d(f_0(x), f_1(x)) < \epsilon(f_0(x))$ to $f_0 \sim f_1$.*

Dowód. Definiujemy funkcję $\epsilon(y) := \text{dist}(y, \mathbb{R}^n \setminus U)/2$. Ponieważ $\mathbb{R}^n \setminus U$ jest domknięty, więc $\epsilon(y) > 0$. Definiujemy homotopię liniową $\bar{F} : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x, t) := (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$. Z bliskości odwzorowań wynika, że $F(x, t) \in U$, więc homotopię $F : X \times I \rightarrow Y$ definiujemy składając \bar{F} z retrakcją $r : U \rightarrow Y$. \square

Twierdzenie 9.3. *Niech M, N będą gładkimi rozmaitościami; oznaczmy $[M, N]_\infty$ zbiór klas gładkiej homotopii gładkich odwzorowań $M \rightarrow N$. Odwzorowanie zapominania $[M, N]_\infty \rightarrow [M, N]$ jest bijekcją.*

Szkic dowodu. Twierdzenie wynika z: istnienia zanurzenia $Y \subset \mathbb{R}^N$ i twierdzenia o otoczeniu tubularnym, tw. 9.2, oraz twierdzenia Weierstrassa o niemal jednostajnej aproksymacji odwzorowań ciągłych wielomianowymi. \square

Bardzo ważny będzie dla konsekwencja twierdzenia Sarda. Przypomnijmy, że jeśli $f : M \rightarrow N$ odwzorowaniem gładkim między rozmaitościami, to punkt $x \in M$ nazywamy *krytycznym* jeśli $Df_x : TM_x \rightarrow TN_x$ nie jest epimorfizmem. Punkt $y \in N$ nazywa się *wartością regularną* jeśli $\forall x \in f^{-1}(y) Df_x : TM_x \rightarrow TN_x$ jest epimorfizmem. zauważmy, że jeżeli $\dim M < \dim N$, to $y \in N$ jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(y)$ jest zbiorem pustym.

Twierdzenie 9.4 (A.B.Brown). ¹⁹ *Niech $f : M \rightarrow N$ będzie odwzorowaniem gładkim między rozmaitościami. Wtedy zbiór wartości regularnych odwzorowania f jest otwartym, gęstym podzbiorem N .*

¹⁹Dowód p. J.Milnor *Topologia z różniczkowego punktu widzenia*, PWN Warszawa 1969, rozdz. 2,3

9.3 Klasyfikacja homotopijna odwzorowań rozmaitości w sfery

Zacznijmy od zbadania odwzorowań $M^k \rightarrow S^n$ w przypadku gdy $k < n$:

Stwierdzenie 9.1. *Niech M^k będzie k -wymiarową, spójną rozmaitością gładką oraz $n > k$. Wówczas dowolne odwzorowanie $M^k \rightarrow S^n$ jest ściągające, czyli $[M^k, S^n] = *$.*

Dowód. Niech $M^k \rightarrow S^n$. Na mocy twierdzenia o aproksymacji gładkiej 9.3 możemy zakładać, że f jest gładkie. Z twierdzenia Browna 9.4 wnioskujemy, że posiada wartość regularną, czyli punkt $y_0 \in S^n$ o pustym przeciwobrazie. Stąd wynika że f jest ściągające. \square

W dalszym ciągu będziemy badać klasy odwzorowań spójnych rozmaitości n -wymiarowych w sfery n -wymiarowe: $[M^n, S^n]$. Pokażemy, że w zbiorze $[M^n, S^n]$ można wprowadzić naturalną strukturę grupy abelowej. Gdy $n = 1$ jest ona dana przez strukturę grupy topologicznej w S^1 . Załóżmy więc, że $n > 1$.

Lemat 9.1. *Jeśli $n > 1$ to dla dowolnej rozmaitości M^m włożenie $j : S^n \vee S^n \subset S^n \times S^n$ indukuje odwzorowanie $j_{\#} : [M^m, S^n \vee S^n] \xrightarrow{\cong} [M^m, S^n \times S^n]$ które jest bijekcją jeśli $m < 2n - 1$ oraz surjekcją jeśli $m = 2n - 1$, jest więc $(2n - 1)$ -równoważnością.*

Dowód. Niech $f : M \rightarrow S^n \times S^n$, z twierdzenia Browna 9.4 wynika, że istnieje $y = (y_0, y_1) \notin f(M) \cup (S^n \vee S^n)$. Bukiet sfer $S^n \vee S^n$ jest retraktem deformacyjnym produktu z usuniętym punktem. Złożenie f z retrakcją deformacyjną $S^n \times S^n \setminus \{(y_0, y_1)\} \rightarrow S^n \vee S^n$ dowodzi, że $j_{\#}$ jest surjekcją. Podobnie, korzystając ponownie z tw. Browna, jeśli $m < 2n - 1$ dowolną homotopię $F : M \times I \rightarrow S^n \times S^n$ możemy "wcisnąć" w $S^n \vee S^n$. \square

Z ostatniego lematu wynika ważny wniosek dotyczący grup homotopii bukiecików sfer:

Wniosek 4. *Dla $n > 1$ włożenie $S^n \vee \dots \vee S^n \hookrightarrow S^n \times \dots \times S^n$ jest $(2n - 1)$ -równoważnością; w szczególności $\pi_n(S^n \vee \dots \vee S^n) \simeq \pi_n(S^n) \oplus \dots \oplus \pi_n(S^n)$.*

Przypomnijmy [Topologia II], że w przypadku bukiecików okręgów mamy izomorfizm: $\pi_1(\bigvee_{i \in I} S^1 \simeq F(I)$, gdzie $F(I)$ oznacza grupę wolną generowaną przez zbiór I , natomiast wyższe grupy homotopii bukiecików znikają.

Zad. 123. Sformułuj i udowodnij wariant Wniosku 4 w przypadku nieskończonego bukieciku.

Niech M będzie n -wymiarową rozmaitością gładką. Działanie grupowe w $[M, S^n]$ definiujemy jako złożenie:

$$[M, S^n] \times [M, S^n] \simeq [M, S^n \times S^n] \xrightarrow{\cong} [M, S^n \vee S^n] \xrightarrow{(id \vee id)_{\#}} [M, S^n]$$

Zad. 124. Jednością tego działania jest odwzorowanie stałe, a odwrotnością $M \rightarrow S^n$ złożenie tego przekształcenia z odbiciem $R : S^n \rightarrow S^n$. $[M, S^n]$ jest grupą abelową.

Skonstruujemy teraz homomorfizm $\mathbb{Z} \rightarrow [M, S^n]$, o którym pokażemy następnie, że jest surjekcją. Zacznijmy od definicji "odwzorowania bąbla" $b : M \rightarrow S^n$, które okaże się być generatorem grupy $[M, S^n]$. [RYSUNEK] Wybierzmy dowolny punkt $x_0 \in M$ oraz dyfeomorfizm $\phi : U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ taki, że $\phi(x_0) = 0$. Zdefiniujemy odwzorowanie $b_1 : M \rightarrow S^n$ jako złożenie:

$$M \xrightarrow{q} M/M \setminus \phi^{-1}(\text{int } D^n) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n / (\mathbb{R}^n \setminus \text{int } D^n) \simeq S^n$$

Dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ definiujemy $b_k : M \rightarrow S^n$ jako k -krotną wielokrotność b_1 w grupie $[M, S^n]$.

Zad. 125. $[b_k] = [(k \cdot id_{S^n}) \circ b_1]$, gdzie $k \cdot id_{S^n}$ oznacza k -krotną wielokrotność odwzorowania $id_{S^n} : S^n \rightarrow S^n$ w $\pi_n(S^n)$.

Zad. 126. Niech $p_k : S^1 \rightarrow S^1$ będzie potęgowaniem: $p_k(z) := z^k$. Wykazać, że $\Sigma^{n-1} p_k \sim k \cdot id_{S^n}$

Stwierdzenie 9.2. Niech M^n będzie n -wymiarową, spójną, zwartą rozmaitością gładką. Klasa homotopii odwzorowania bąbla $[b_1]$ generuje grupę $[M, S^n]$, przy czym jeśli M jest nieorientowalna, to $2[b_1] = 0$.

Dowód poprzędzimy dwoma lematami:

Lemat 9.2. Niech $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ oraz $f : (U, U \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy istnieje otoczenie $U' \ni 0$ takie, że $f \sim Df_0 : (U', U' \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Dowód. Zdefiniujemy homotopię $H : Df_0 \sim f$ na dowolnym dysku $U' \subset U$ o środku w $0 \in U'$ przy pomocy ilorazu różnicowego:

$$H(v, t) := \begin{cases} f(tv)/t & \text{dla } t > 0 \\ Df_0 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

□

Lemat 9.3. Dowolny izomorfizm liniowy $A : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ jest homotopijny z identycznością $I : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ lub odbiciem w hiperpowierzchni $R : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Dowód. Wystarczy przypomnieć, że grupa liniowa $GL(n, \mathbb{R})$ ma dwie składowe łukowej spójności składające się odpowiednio z macierzy o wyznaczniku dodatnim i ujemnym. □

Uwaga 7. Z ostatnich dwóch lematów wynika, że odwzorowanie "bąbla" zależy od wyboru mapy jedynie z dokładnością do znaku. Ponieważ dla spójnej rozmaitości gładkiej istnieje dyfeomorfizm przeprowadzający zadany punkt na dany inny punkt²⁰, klasa homotopii $[b_1]$ nie zależy także od wyboru punktu.

Dowód Stw. 9.2. Niech $f : M \rightarrow S^n$ będzie odwzorowaniem; dzięki tw. o aproksymacji 9.3 i tw. Browna 9.4 możemy zakładać, że f jest gładkie a $y_0 \in S^n$ jest jego wartością regularną. Będziemy rozważać odwzorowanie par $f : (M, M \setminus f^{-1}(y_0)) \rightarrow (S^n, S^n \setminus \{y_0\})$. Wówczas, ponieważ M jest zwarta, $f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\}$ jest skończonym, domkniętym podzbiorem M oraz

$$\forall_i \exists U_i \ni x_i \quad f|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\cong} f(U_i)$$

oraz $U_i \cap U_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ [RYSUNEK]. Rozważmy obcięcie $f : \coprod (U_i, U_i \setminus \{x_i\}) \rightarrow (S^n, S^n \setminus \{y_0\})$ i skorzystamy z Tw.9.1 oraz lematów o pochodnej 9.2, 9.3. Wynika z nich, że odwzorowanie f jest homotopijne ze złożeniem

$$M \xrightarrow{q} M/M \setminus (\bigcup U_i) \xrightarrow{\cong} S^n \vee \dots \vee S^n \xrightarrow{I \vee \dots \vee I \vee R \vee \dots \vee R} S^n$$

²⁰Dowód p. J.Milnor *Topologia z różniczkowego punktu widzenia* PWN Warszawa 1969, Rozdz.4, Lemat o jedno-rodności

Zauważmy, że diagram:

$$\begin{array}{ccc} & & S^n \\ & \nearrow^{b_1} & \downarrow \nu \\ M & \xrightarrow{q} & S^n \vee \dots \vee S^n \end{array}$$

jest homotopijnie przemienny, a więc z definicji działania w $\pi_n(S^n)$, $f \sim b_r$ gdzie $r = \#(I) - \#(R)$.

Jeśli M jest rozmaitością nieorientowalną, to dla danego $x \in M$ istnieje izotopijny z identycznością dyfeomorfizm $h : M \rightarrow M$ [ODSYŁACZ: Hirsch?] taki, że $h(x) = x$ natomiast $Dh_x : TM_x \rightarrow TM_x$ zmienia orientację w punkcie x (globalnej orientacji nie ma!)²¹. Stąd wynika, że $b_1 \sim h \circ b_1 \sim R \circ b_1$, a więc $2[b_1] = 0$. \square

Stwierdzenie 9.3. Niech M^n będzie n -wymiarową, spójną niezwartą rozmaitością gładką. Wówczas dowolne odwzorowanie $M^n \rightarrow S^n$ jest ściągające, czyli $[M^k, S^n] = *$.

Szkic dowodu. Z założenia, iż M nie jest zwarta, na mocy tw. Browna 9.4 istnieje wartość regularna $y_0 \in S^n$ taka, że $f^{-1}(y_0) \subset M$ jest domkniętym podzbiorem dyskretnym (skończonym lub nieskończonym). Zbiór ten ma domknięte otoczenie \bar{U} homeomorficzne z $D^{n-1} \times \mathbb{R}$ [RYSU-NEK]. Na mocy Tw. 9.1 przekształcenie f jest homotopijne ze złożeniem $M \xrightarrow{q} M/M \setminus U \simeq D^{n-1} \times \mathbb{R}/S^{n-2} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\bar{f}} S^n$. Ponieważ $D^{n-1} \times \mathbb{R}/S^{n-2} \times \mathbb{R} \sim S^{n-1}$ a więc na mocy Tw. 9.1 odwzorowanie \bar{f} , a więc i f jest ściągające. \square

Następne twierdzenie w pełni opisuje klasyfikację homotopijna odwzorowań rozmaitości w sfery tego samego wymiaru:

Twierdzenie 9.5 (H.Hopf). Niech M będzie n -wymiarowa, spójna rozmaitością. Wówczas istnieją następujące izomorfizmy grup:

$$[M, S^n] \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{jeśli } M \text{ jest zwarta i orientowalna} \\ \mathbb{Z}_2 & \text{jeśli } M \text{ jest zwarta i nieorientowalna} \\ 0 & \text{jeśli } M \text{ jest niezwartą} \end{cases}$$

Dowód. Gdy M jest nieorientowalna, twierdzenie jest tożsame z Stw. 9.3. W pozostałych przypadkach Stw 9.2 pozwala zdefiniować epimorfizm z grupy cyklicznej do grupy klas homotopii. Pokażemy, że jest on izomorfizmem korzystając z konstrukcji stopnia odwzorowania. Jeśli rozmaitość M ma wybrana orientację jest to homomorfizm $\deg : [M, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$; w przypadku nieorientowalnym $\deg : [M, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Konstrukcja i własności stopnia są pięknie opisane w cytowanej książce J.Milnora²². Wystarczy teraz zauważyć, że $\deg(b_1) = 1$. \square

9.4 Aproksymacja komórkowa

Dla dowodu twierdzenia o aproksymacji komórkowej i doklejaniu komórki wygodnie będzie rozważać *relatywne rozmaitości* i odwzorowania gładkie między nimi.

²¹Każda nieorientowalna rozmaitość zawiera jako podzbiór otwarty uogólnioną wstęgę Moebiusa. Taki dyfeomorfizm wstęgi oczywiście istnieje i "wygaszając" go przy brzegu wstęgi można go rozszerzyć jako identyczność na całą rozmaitość

²²J.Milnor *Topologia z różniczkowego punktu widzenia* PWN Warszawa 1969, Rozdz. 4,5

Definicja 9.6. Parę przestrzeni topologicznych (X, A) nazywamy *relatywną rozmaitością* jeśli $A \subset X$ jest domkniętym podzbiorem, a $X \setminus A$ jest rozmaitością różniczkową. Odwzorowanie $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ nazywamy gładkim, jeśli $f : X \setminus f^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ jest gładkie.

Bardzo ważnym dla nas przykładem relatywnych rozmaitości są pary szkieletów CW-kompleksów $(X^{(n)}, X^{(n-1)})$ bo $X^{(n)} \setminus X^{(n-1)}$ jest sumą rozłączną otwartych dysków n -wymiarowych. Ogólniej, jeśli $(M, \partial M)$ jest rozmaitością z brzegiem oraz $f : \partial M \rightarrow A$ jest odwzorowaniem, to $(M \cup_f A, A)$ jest relatywną rozmaitością. Jeśli $(M, \partial M) = (D^n, S^{n-1})$ to taką relatywną rozmaitość nazywamy *relatywną n -wymiarową komórką*. O relatywnych komórkach można myśleć jako o stożkach odwzorowań sfer $S^{n-1} \rightarrow A$. Oczywiście para $(S^n, 1)$ jest relatywną komórką!

Definicja 9.7. Odwzorowanie relatywnych komórek $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ nazywa się *regularne* jeśli istnieje punkt $y_0 \in Y \setminus B$ taki, że dla każdego punktu $x \in f^{-1}(y_0)$, $f : X \setminus f^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ jest gładkie na pewnym otoczeniu punktu x i pochodna Df_x jest epimorfizmem (tzn. y_0 jest wartością regularną).

Twierdzenie 9.8. Dla dowolnego odwzorowanie relatywnych komórek $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ istnieje odwzorowanie regularne $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ takie, że $g \sim f \text{ rel } A$.

Dowód. Dowód²³ opiera się na tw. Weierstrassa i tw. Sarda i przebiega metodą "koncentrycznych dysków". [RYSUNEK] \square

Korzystając z Tw. 9.8 udowodnimy twierdzenie o homotopijnej aproksymacji komórkowej odwzorowań między CW-kompleksami.

Twierdzenie 9.9. Jeśli $f : X \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem CW-kompleksów, $A \subset X$ podkompleksem na którym f jest komórkowe, to istnieje komórkowe odwzorowanie $g : X \rightarrow Y$ takie, że $f \sim g \text{ rel } A$.

Dowód. Odwzorowanie g konstruujemy rozszerzając je na kolejne szkielety $g_n : X^{(n)} \rightarrow Y$.

Odwzorowanie komórkowe $g_0 : X^{(0)} \rightarrow Y$ konstruujemy łącząc drogami punkty ze zbioru $f(X^{(0)})$ z wybranymi wierzchołkami, czyli elementami $Y^{(0)}$. Drogi te definiują homotopię $G_0 : X^{(0)} \times I \rightarrow Y$ między f a g_0 .

Założmy, że dane jest już odwzorowanie komórkowe $g_{n-1} : X^{(n-1)} \rightarrow Y$ oraz homotopia $G_{n-1} : X^{(n-1)} \times I \rightarrow Y$ między f a g_{n-1} . Chcemy rozszerzyć odwzorowanie g_{n-1} do odwzorowania komórkowego $g_n : X^{(n)} \rightarrow Y^{(n)} \subset Y$ i homotopię G_{n-1} . Ponieważ włożenie $(X^{(n-1)} \subset X^{(n)})$ jest korozwłóknieniem, więc g_{n-1} rozszerza się do odwzorowania $\bar{g}_{n-1} : (X^{(n)}, X^{(n-1)}) \rightarrow (Y, Y^{(n-1)})$ przy czym $\bar{g}_{n-1} \sim f|X^{(n)}$. Poprawimy pozostając w klasie homotopii odwzorowanie \bar{g}_{n-1} do odwzorowania $g_n : X^{(n)} \rightarrow Y^{(n)}$, zmieniając je komórka po komórce. Niech $(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\bar{\alpha}} (X^{(n)}, X^{(n-1)})$ będzie odwzorowaniem charakterystycznym pewnej komórki n -wymiarowej i rozpatrzmy złożenie $(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\bar{\alpha}} (X^{(n)}, X^{(n-1)}) \xrightarrow{\bar{g}_{n-1}} (Y, Y^{(n-1)})$ Ponieważ dysk D^n jest zwarty, a więc jego obraz $(\bar{g}_{n-1} \circ \bar{\alpha})(D^n)$ jest zawarty w pewnym szkielecie $Y^k \subset Y$. Wystarczy pokazać, że jeśli $k > n$ to można homotopijnie zepchnąć $\bar{g}_{n-1} \circ \bar{\alpha}$ do $Y^{(k-1)}$. Korzystając ponownie ze zwartości dysku, wnioskujemy, że $(\bar{g}_{n-1} \circ \bar{\alpha})(D^n)$ przecina się tylko ze skończoną liczbą komórek k -wymiarowych, czyli $\subset Y^{(n-1)} \cup \bar{\alpha}_1(D^n) \cup \dots \cup \bar{\alpha}_r(D^n)$. Z Tw. 9.8 wynika, że możemy homotopijnie rel S^{n-1} po kolei możemy zmienić odwzorowanie $\bar{g}_{n-1} \circ \bar{\alpha}$ do odwzorowania takiego, że w danej komórce $\alpha_i(D^n)$ jest wartość regularna, czyli ponieważ $k > n$ punkt nie leżący w $(\bar{g}_{n-1} \circ \bar{\alpha}_i)(D^n)$, możemy więc "zepchnąć" homotopijnie odwzorowanie z tej komórki do $Y^{(k-1)}$. \square

²³M.M.Postnikov *Lekcje po algebraicznej topologii, Teoria kłjetocznych prostrantw*. Mir, Moskwa 1985, Lekcja 2

9.5 Efekt doklejenia komórki na grupach homotopii

Twierdzenie 9.10. Niech (X, A) będzie $n + 1$ -wymiarową relatywną komórką ($n > 1$), a $\chi : (S^n, 1) \rightarrow (A, a_0)$ odwzorowaniem doklejającym. Włożenie $j : A \hookrightarrow X$ jest n -równoważnością, przy czym $\ker\{j_\# : \pi_i(A, a_0) \rightarrow \pi_i(X, a_0)\}$ jest $\pi_1(A, a_0)$ -modułem generowanym przez klasę $[\chi]$

Uwaga 8. W przypadku $n = 1$, $\ker\{j_\# : \pi_1(A, a_0) \rightarrow \pi_1(X, a_0)\}$ jest podgrupą normalną generowaną przez klasę $[\alpha]$. Poniższy dowód obejmuje też tę sytuację; inny dowód opiera się na tw. Seiferta - van Kampena [TOPOLOGIA II]

Lemat 9.4. Niech (X, A) będzie $n+1$ -wymiarową relatywną komórką ($n > 1$). Grupa $\pi_{n+1}(X, A, a_0)$ jest wolnym $\pi_1(A, a_0)$ modułem generowanym przez odwzorowanie charakterystyczne komórki: $\chi : (D^{n+1}, S^n, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$.

Dowód. Niech $\alpha : (D^{n+1}, S^n, 1) \rightarrow (X, A, a_0)$ będzie dowolnym odwzorowaniem; na mocy Tw. 9.8 możemy zakładać, że jest regularne $x_0 \in X \setminus A$ jest wartością regularną oraz $\alpha^{-1}(x_0) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Rozpatrzmy diagram, w którym skracamy oznaczenia $(D, S, 1) := (D^{n+1}, S^n, 1)$:

$$\begin{array}{ccc} & & (D, D \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \\ & \nearrow j & \downarrow \alpha \\ (D, S, 1) & \xrightarrow{\alpha} & (X, A, a_0) \end{array}$$

Zauważmy, że przekształcenie indukowane na grupach homotopii przez włożenie j możemy wpisać w następujący sposób w którym ∂ oznacza homomorfizm brzegu w ciągu odpowiedniej pary, a pozostałe homomorfizmy są indukowane przez odpowiednie włożenia:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus \pi_{n+1}(D, D \setminus \{p_s\}, 1) & \xrightarrow[\simeq]{\bigoplus \partial} & \bigoplus \pi_n(D \setminus \{p_s\}, 1) \\ \uparrow & & \uparrow \simeq i_\# \\ \pi_{n+1}(D, D \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) & \xrightarrow[\simeq]{\partial} & \pi_n(D \setminus \{p_1, \dots, p_k\}, 1) \\ \uparrow j_\# & & \uparrow j_\# \\ \pi_{n+1}(D, S, 1) & \xrightarrow[\simeq]{\partial} & \pi_n(S, 1) \end{array}$$

Ten diagram pozwala następująco rozłożyć $\alpha_\#$:

$$\begin{array}{ccc} & & \bigoplus \pi_{n+1}(D, D \setminus \{p_s\}, 1) \\ & \nearrow j_\# & \downarrow \bigoplus \alpha_{s\#} \\ \pi_{n+1}(D, S, 1) & \xrightarrow{\alpha_\#} & \pi_{n+1}(X, A, a_0) \end{array}$$

Zauważmy, że $j_\#([id]) = \bigoplus h_{[\omega]}[D_s, S_s, y_s]$ gdzie $[D_s, S_s, y_s]$ oznacza dowolnie mały dysk wokół p_s , $y_s \in S_s$ a ω jest drogą łączącą w $D \setminus \{p_s\}$ 1 z y_s [RYSUNEK]. Wystarczy teraz

zauważyc, że jeśli wybierzemy D_s tak mały, aby $\alpha|_{D_s}$ było dyfeomorfizmem, to korzystając z Lematu 9.3 otrzymujemy, że $\alpha_{s\#}h_{[\omega]}[D_s, S_s, y_s] = \pm h_{[\alpha\circ\omega]}[\chi]$. Udowodniliśmy w ten sposób, że $\pi_{n+1}(X, A, a_0)$ jest $\pi_1(A, a_0)$ -modułem z jednym generatorem, co wystarczy nam do wykazania twierdzenia o doklejaniu komórki. Żeby pokazać, że jest to moduł wolny, trzeba skorzystać z teorii nakryć. \square

Dowód Tw. 9.10. Rozpatrzmy ciąg dokładny grup homotopii pary (X, A, a_0) :

$$\dots \rightarrow \pi_{i+1}(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \pi_i(A, a_0) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_i(X, b_0) \xrightarrow{j_{\#}} \pi_i(X, A, a_0) \xrightarrow{\partial} \dots$$

który jest ciągiem $\pi_1(A, a_0)$ -modułów. Tw. 9.8 natychmiast implikuje, że $\pi_i(X, A, a_0) = 0$ dla $i \leq n$, a więc $j_{\#} : \pi_i(A, a_0) \rightarrow \pi_i(X, a_0)$ jest izomorfizmem dla $i < n$ i epimorfizmem dla $i = n$.

Z dokładności ciągu pary wynika, że $\ker\{j_{\#} : \pi_i(A, a_0) \rightarrow \pi_i(X, a_0)\} = \text{im}\{\partial : \pi_{n+1}(X, A, a_0) \rightarrow \pi_n(A, a_0)\}$. Teza wynika więc natychmiast z Lematu 9.4, bowiem $\partial[\bar{\chi}] = [\chi]$. \square

Zad. 127. Dla danej grupy (abelowej) π i liczby $n > 10$ ($n = 1$) skonstruować metoda doklejania komórek CW-kompleks typu $K(\pi, n)$.