III PRZESTRZENIE WEKTOROWE.

Wstęp.* Gdy badamy przekształcenie liniowe przestrzeni współrzędnych, napotykamy następującą poważną trudność. Obraz rozważanego przekształcenia niekoniecznie jest przestrzenią współrzędnych, podobnie jak i przeciwobraz zera przy tym przekształceniu (tzn. zbiory te na ogół nie są postaci $\mathbb{F}^k$ dla jakiegokolwiek k). By tej trudności wyjść naprzeciw, w algebrze liniowej bada się przestrzenie wektorowe, na tyle ogólne, by każdy zbiór rozwiązań układu równań jednorodnych, a także obraz każdego przekształcenia liniowego $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, był taką przestrzenią. Pojęcie przekształcenia liniowego też musi wówczas zostać uogólnione, by móc rozważać przekształcenia liniowe między dowolnymi przestrzeniami wektorowymi. Otrzymana „kategoria" przestrzeni wektorowych ma tę zasadniczą zaletę, że można w niej mówić o podprzestrzeniach.

W tym rozdziale opisujemy wstępne pojęcia tej nowej kategorii. Język, który rozbudujemy, ma podstawowe znaczenie, bo przestrzenie wektorowe często w matematyce spotykamy. Przede wszystkim okaże się też w dalszej części wykładu, że o przekształceniu liniowym przestrzeni współrzędnych powiedzieć można znacznie więcej, gdy używać pojęć takich, jak np. „obcięcie odwzorowania liniowego do podprzestrzeni", wykraczających poza to, co wyrażaliśmy językiem używanym w rozdziale II.

§ 1. Podstawowe pojęcia.

1. Przestrzenie i podprzestrzenie.

Niech $\mathbb{F}$ będzie pewnym ciałem, a V niepustym zbiorem. Elementy zbioru V nazwijmy **wektorami**, a ciała $\mathbb{F}$ – **skalarami**. Powiemy, że V jest **przestrzenią wektorową** (lub: **liniową**) nad $\mathbb{F}$, jeśli określone zostały:

operacja $V \times V \ni (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$ dodawania wektorów, oraz

operacja $\mathbb{F} \times V \ni (c, \mathbf{v}) \mapsto c\mathbf{v} \in V$ mnożenia ich skalary

o następujących własnościach:

a) $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_1$ i $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1+(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)$ dla wszystkich $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$;

b) istnieje wektor $\mathbf{0}_V \in V$ taki, że $\mathbf{0}_V + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ dla każdego $\mathbf{v} \in V$;

c) $c(d\mathbf{v}) = (cd)\mathbf{v}$, $(c+d)\mathbf{v} = c\mathbf{v}+d\mathbf{v}$, $c(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = c\mathbf{v}+c\mathbf{w}$ dla $c, d \in \mathbb{F}$ i $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;

d) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ i $0\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ dla każdego $\mathbf{v} \in V$.

Warunek a) oznacza, że dodawanie wektorów jest przemienne i łączne, a c) – że mnożenie ich przez skalary jest rozdzielne względem dodawania wektorów, a także względem dodawania skalarów, i że ma miejsce naturalna forma łączności tego mnożenia. Odnotujmy, że wektor $\mathbf{0}_V$ jest wyznaczony jednoznacznie: jeśli $\mathbf{0}_V$ i $\mathbf{0}'_V$ spełniają b), to $\mathbf{0}_V + \mathbf{0}'_V = \mathbf{0}'_V$ oraz $\mathbf{0}_V + \mathbf{0}'_V = \mathbf{0}'_V + \mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V$, skąd $\mathbf{0}_V = \mathbf{0}'_V$. Wektor $\mathbf{0}_V$ nazywamy **zerowym** i oznaczamy na ogół przez $\mathbf{0}$, bo rzadko zachodzi obawa pomylenia go ze skalarem 0 lub wektorem zerowym innej przestrzeni.

Gdy ciałem skalarów jest $\mathbb{R}$ mówimy o **rzeczywistej** przestrzeni wektorowej, gdy zaś $\mathbb{C}$ –o **zespolonej**. Te dwa ciała skalarów są dla nas najważniejsze.

Podkreślić należy, że mówiąc o przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{F}$ mamy na myśli nie tylko zbiór wektorów V, ale i działania dodawania wektorów i mnożenia ich przez skalary. Gdy określenie tych działań nie budzi wątpliwości, to nie będziemy o nich przypominać (co nie powinno sprawiać wrażenia, że je zaniedbujemy).

Zadanie 1. Dla wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ przestrzeni wektorowej V, równanie $\mathbf{v} + \mathbf{x} = \mathbf{u}$ ma w V jedyne rozwiązanie, równe $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$.

W dalszej części piszemy $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ zamiast $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$, a $-\mathbf{v}$ zamiast $(-1)\mathbf{v}$.

Definicja. Niepusty podzbiór W przestrzeni wektorowej V nad $\mathbb{F}$ jest jej **podprzestrzenią liniową** (lub: **wektorową**), jeśli

$$c\mathbf{w} \in W \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w} + \mathbf{w}' \in W \quad \text{dla } c \in \mathbb{F} \text{ oraz } \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W.$$

Latwo zauważyć, że z działaniami zadanymi przez działania przestrzeni V, podprzestrzeń W jest przestrzenią wektorową. (Ćwiczenie: dlaczego $\mathbf{0}_V \in W$?)

Nazwy „przestrzeń wektorowa" i „podprzestrzeń wektorowa" (czy liniowa) będziemy na ogół skracać do „przestrzeń" i „podprzestrzeń", odpowiednio, bo aż do rozdziału VIII innych przestrzeni i podprzestrzeni niż wektorowe nie rozważamy.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 1 w §II.1.1 i 1–7 w §II.1.2 (bez bazy i wymiaru).

2. Przykłady przestrzeni wektorowych.

O użyteczności wprowadzonych pojęć przesądza i to, że wiele zbiorów ma naturalną strukturę przestrzeni wektorowej. Oto przykłady:

1. Przestrzeń $\mathbb{F}^k$, z działaniami określonymi w poprzednim rozdziale, jest dla każdego $k \geq 0$ przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$, nazywaną **przestrzenią współrzędnych**. (Przyjmujemy $\mathbb{F}^0 := \{0_\mathbb{F}\}$ oraz $\mathbb{F}^1 := \mathbb{F}$). Przestrzenie współrzędnych i ich podprzestrzenie nadal odgrywają kluczową rolę w dalszej części wykładu.

2. Dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$, zbiór $R = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k : \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}_l\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{F}^k$. (R jest zbiorem rozwiązań wyznaczonego przez macierz $\mathbf{A}$ układu l równań jednorodnych).

3. Zbiór $\mathbb{F}[x]$ wielomianów o współczynnikach w danym ciele $\mathbb{F}$ jest (przy naturalnych działaniach dodawania i mnożenia przez skalar) przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$, a dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zbiór $\mathbb{F}_k[x]$ wielomianów stopnia $\leq k$ jest jej podprzestrzenią.

4. Niech T będzie dowolnym zbiorem, a V przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$.

Wówczas zbiór V^T wszystkich funkcji $T \to V$ z działaniami określonymi wzorami

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})(t) := \mathbf{v}(t)+\mathbf{w}(t) \ \text{ i } \ (c\mathbf{v})(t) := c\mathbf{v}(t), \quad \text{dla każdych } \ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V^T, \ c \in \mathbb{F}, \ t \in T.$$

jest przestrzenią wektorową. (Uwaga: jest ona równa $\mathbb{F}^k$ gdy $V = \mathbb{F}$ i $T = \{1, ..., k\}$.)

5. Przyjmując w poprzednim przykładzie $V = \mathbb{F}$ otrzymujemy przestrzeń wektorową $\mathbb{F}^T$. Dla $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ma ona wiele ważnych podprzestrzeni:

i) Jeśli $T = [0, 1]$ lub $T = \mathbb{R}$, to przestrzeń $C(T, \mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych $T \to \mathbb{R}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^T$. (Czytelnik zaznajomiony z pojęciem przestrzeni metrycznej zauważy, że o przestrzeni $C(T, \mathbb{R})$ można mówić i wtedy, gdy T jest dowolną taką przestrzenią.)

ii) Zbiór $C^1(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, posiadających ciągłą pochodną, jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

iii) Dla dowolnego zbioru T, zbiór $l_\infty(T)$ wszystkich funkcji ograniczonych $T \to \mathbb{R}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^T$. (Funkcję $f : T \to \mathbb{R}$ nazywamy **ograniczoną**, gdy $\sup_{t\in T} |f(t)| < \infty$).

iv) Wektory przestrzeni $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ są nieskończonymi ciągami liczb rzeczywistych. (Każda funkcja $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest takim ciągiem.) Oto pewne jej znane podprzestrzenie.

a) przestrzeń $l_\infty := l_\infty(\mathbb{N})$ wszystkich ciągów ograniczonych.

b) przestrzeń $c_0 := \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \lim u_n = 0\}$ wszystkich ciągów zbieżnych do 0.

6. Powyżej, można użyć ciała liczb zespolonych $\mathbb{C}$ w miejsce $\mathbb{R}$, uzyskując odpowiednie przestrzenie zespolone. Uzupełnienie szczegółów pozostawione jest jako ćwiczenie.

7. Przestrzeń wektorową można też traktować jako przestrzeń nad dowolnym podciałem $\mathbb{G}$ jej ciała skalarów. (Nie zmieniamy dodawania wektorów ani mnożenia ich przez skalary, lecz zakładamy, że te ostatnie należą do $\mathbb{G}$.) Dla przykładu, każdą zespoloną przestrzeń wektorową możemy trakować i jako przestrzeń nad $\mathbb{R}$, a każdą taką przestrzeń –jako przestrzeń nad ciałem liczb wymiernych.

8. Jeśli V jest rzeczywistą przestrzeń wektorową, to zbiór wyrażeń $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, tworzy przestrzeń nad $\mathbb{C}$ z działaniami określonymi wzorami $(\mathbf{u}+i\mathbf{v})+(\mathbf{u}'+ i\mathbf{v}') := \mathbf{u} + \mathbf{u}' + i(\mathbf{v} + \mathbf{v}')$ oraz $(a + bi)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) := a\mathbf{u} - b\mathbf{v} + i(b\mathbf{u} + a\mathbf{v})$. Otrzymaną przestrzeń nazywamy **kompleksyfikacją** przestrzeni rzeczywistej V.

9. Przecięcie $W := \bigcap\{W_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ dowolnej rodziny podprzestrzeni W_γ przestrzeni V też jest podprzestrzenią. Istotnie, gdy $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ i $c \in \mathbb{F}$, to $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W_\gamma$ i wobec tego $\mathbf{w}_1 + c\mathbf{w}_2 \in W_\gamma$, dla każdego $\gamma \in \Gamma$, skąd $\mathbf{w}_1 + c\mathbf{w}_2 \in W$.

Zadania uzupełniające. Dowieść, że:

1. Gdy żadna z dwóch podprzestrzeni A, B nie jest zawarta w drugiej, to ich mnogościowa suma nie jest podprzestrzenią. Jest nią jednak $A+B := \{\mathbf{a}+\mathbf{b} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\}$.

2. Gdy U, V_1, V_2 są podprzestrzeniami i $V_1 \subset U$, to $U \cap (V_1 + V_2) = U \cap V_1 + U \cap V_2$. Czy jest tak, gdy podprzestrzenie spełniają warunek $U \subset V_1$? Gdy są dowolne?

3. Przekształcenia liniowe przestrzeni wektorowych.

Zasadnicze dla teorii przestrzeni liniowych jest też następujące pojęcie.

Definicja. Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Przekształcenie $L : V \to W$ nazwiemy **liniowym**, jeśli mają miejsce poniższe równości (działania po ich lewych stronach są w V, a po prawych w W):

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) \ \text{ i } \ L(c\mathbf{v}) = cL(\mathbf{v}), \quad \text{dla } \ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \text{ i } c \in \mathbb{F}.$$

Zbiór wszystkich przekształceń liniowych $V \to W$ oznaczamy przez $\mathcal{L}(V, W)$, a gdy $V = W$ – przez $\mathcal{L}(V)$. Pisząc „$L \in \mathcal{L}(V, W)$" czy „$L : V \to W$ jest przekształceniem liniowym" zakładamy, że V i W to przestrzenie liniowe nad tym samym ciałem.

Przekształcenie liniowe nazywamy

zanurzeniem lub **monomorfizmem** (liniowym), jeśli jest różnowartościowe,

izomorfizmem (liniowym), jeśli jest różnowartościowe i „na".

Przekształcenie $V \to W$ zadane wzorem $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{0}_W$ nazywa się **zerowym** i oznacza przez 0, a przekształcenie $V \to V$ zadane wzorem $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}$ nazywa się **identycznościowym** i oznacza I lub przez I_V; oba są liniowe.

Uwaga 1. Zamiennie z nazwą **przekształcenie liniowe** używamy też **odwzorowanie liniowe**. Słowa „przekształcenie" i „odwzorowanie" mają tu to znaczenie, jakie na wykładzie Wstępu do Matematyki przysługuje słowu „funkcja". Jednak dla nas „funkcja" i „funkcjonał" oznaczać będzie na ogół przekształcenie w ciało skalarów.

Zadanie 1. Jeśli $L : V \to W$ jest przekształceniem liniowym, to

$L(c_1\mathbf{v}_1+...+c_k\mathbf{v}_k) = c_1L(\mathbf{v}_1)+...+c_kL(\mathbf{v}_k)$ dla każdych $c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}$ i $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in U$.

W szczególności, $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ i $L(-\mathbf{v}) = -L(\mathbf{v})$ dla każdego $\mathbf{v} \in V$.

Uwaga 2. Z twierdzenia 1 w §II.1.2 wynika, że powyższa definicja przekształceń liniowych jest dla $V = \mathbb{F}^k, W = \mathbb{F}^l$ zgodna z podaną w §II.1. Oznacza to, że każde przekształcenie $L : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, liniowe w sensie obecnej definicji, jest postaci $\mathbb{F}^k \ni \mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v} \in \mathbb{F}^l$ dla pewnej (jednoznacznie przez L wyznaczonej) macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$.

Przykład 1. **Iloczyn kartezjański przestrzeni wektorowych** V_1 i V_2 definiujemy jako zbiór $V_1 \times V_2$, wyposażony w działania $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2)$ oraz $c(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (c\mathbf{v}_1, c\mathbf{v}_2)$ (po prawych stronach występują działania w przestrzeniach V_1, V_2). Latwo sprawdzić, że iloczyn ten jest przestrzenią wektorową, a każde z rzutowań $P_j : V_1 \times V_2 \to V_j$, $j = 1, 2$, jest przekształceniem liniowym. (Oczywiście, rzutowania są zadane wzorami $P_j(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_j$ dla $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V_1 \times V_2$.)

Tak samo jest z iloczynem kartezjańskim dowolnej rodziny przestrzeni wektorowych, kóry oznaczamy przez $\prod_{i\in I} V_i$, a w przypadku skończonej i ponumerowanej rodziny przestrzeni przez $\prod_{i=1}^{k} V_i$ czy $V_1 \times ... \times V_k$.

Przykład 2. Dla dowolnych wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in V$, przekształcenie z $\mathbb{F}^k$ do V, zadane wzorem $(c_1, ..., c_k) \mapsto c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_k\mathbf{v}_k$, jest liniowe. $\boxminus$

Oto pewne wyniki rozdziału II, wypowiedziane w języku przekształceń liniowych:

Stwierdzenie 1. *a) Jeśli $k > l$, to nie istnieje różnowartościowe przekształcenie liniowe $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$.*

b) Macierz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ wtedy i tylko wtedy jest nieosobliwa, gdy $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$ jest izomorfizmem liniowym.

Dowód. a) Niech $L \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^k, \mathbb{F}^l)$. Obierzmy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ tak, by $L = L_{\mathbf{A}}$. Jeśli $k > l$, to równanie $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_l$ ma rozwiązanie $\mathbf{v} \neq 0$ (patrz wniosek 2 z §II.3.3) Wtedy $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_l = L(\mathbf{0}_k)$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_k$, więc przekształcenie L nie jest różnowartościowe.

Część b) jest powtórzeniem twierdzenia 1 z §II.5.1. $\square$

Na koniec sformułujemy w postaci zadań łatwe do uzasadnienia, lecz bardzo użyteczne własności odwzorowań liniowych.

Zadania.

2. Złożenie odwzorowań liniowych jest odwzorowaniem liniowym.

3. Złożenie izomorfizmów liniowych jest izomorfizmem liniowym; podobnie, odwrotność izomorfizmu liniowego jest izomorfizmem liniowym.

4. Jeśli $L : V \to W$ jest odwzorowaniem liniowym, a V_0 i W_0 podprzestrzeniami przestrzeni V i W, odpowiednio, to $L(V_0)$ i $L^{-1}(W_0)$ są podprzestrzeniami przestrzeni W i V, odpowiednio. W szczególności, obraz $\mathrm{im}(L) := L(V)$ i jądro $L^{-1}(\mathbf{0}_W)$ (por. niżej) przekształcenia L są podprzestrzeniami przestrzeni W i V, odpowiednio.

5. Dla zadanych przestrzeni wektorowych V, W nad $\mathbb{F}$, zbiór $\mathcal{L}(V, W)$ wszystkich przekształceń liniowych $V \to W$ jest podprzestrzenią przestrzeni W^V wszystkich przekształceń $V \to W$. W szczególności, $\mathcal{L}(V, W)$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{F}$.

6. $L \circ (K_1 + cK_2) = L \circ K_1 + cL \circ K_2$ dla $K_1, K_2 \in \mathcal{L}(U, V)$, $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i $c \in \mathbb{F}$.

Definicja. Dla przekształcenia $L \in \mathcal{L}(V, W)$, zbiór $L^{-1}(\mathbf{0}_W)$ jest na mocy zadania 4 podprzestrzenią przestrzeni V. Zbiór ten nazywamy **jądrem przekształcenia** L i oznaczamy $\ker(L)$ (od angielskiego „kernel"). Rolę jądra opisuje poniższe zadanie:

7. Dla $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ mamy

$$L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2) \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \ker(L).$$

W szczególności, L wtedy i tylko wtedy jest zanurzeniem, gdy $\ker(L) = \{\mathbf{0}\}$.

Zadania uzupełniające. (Poniżej, U, V, W itp. to przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{F}$.)

1. Dowieść, że przekształcenie $L : V \to V_1 \times V_2$ wtedy i tylko wtedy jest liniowe, gdy liniowe są oba jego złożenia $P_1 \circ L$ i $P_2 \circ L$. z rzutami $P_i : V_1 \times V_2 \to V_i$.

2. Niech $K \in \mathcal{L}(U, V)$ i $L \in \mathcal{L}(U, W)$. Dowieść, że gdy $\ker(K) \subset \ker(L)$, to $L = S \circ K$ dla pewnego przekształcenia liniowego $S : K(U) \to W$. Rozumować tak:

a) Dla każdego wektora $\mathbf{v} \in K(U)$ obrać taki wektor $\mathbf{u_v} \in U$, że $K(\mathbf{u_v}) = \mathbf{v}$, i przyjąć $S(\mathbf{v}) = L(\mathbf{u_v})$. Dowieść, że wartość $S(\mathbf{v})$ nie zależy od wyboru wektora $\mathbf{u_v}$.

b) Dowieść liniowości otrzymanego przekształcenia S.

3. Niech $f : X \to V$ będzie bijekcją (=przekształceniem różnowartościowym i „na") zbioru X na przestrzeń wektorową V nad $\mathbb{F}$. Wyposażmy X w **działania przeciągnięte**: $\mathbf{x}_1 \boxplus \mathbf{x}_2 := f^{-1}(f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2))$ i $c \cdot \mathbf{x} := f^{-1}(cf(\mathbf{x}))$ dla $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ i $c \in \mathbb{F}$.

a) Wykazać, że X jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{F}$, a $f : X \to V$ jest izomorfizmem.

b) Określić działania w X wzorami, gdy $V = \mathbb{F} = \mathbb{R}$, $X = (0, \infty)$ i $f(x) = \ln x$.

c) To samo, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$, X to zbiór podzbiorów zbioru T, $V = \mathbb{F}^T$, a $f : X \to V$ przyporządkowuje każdemu zbiorowi $A \in X$ jego funkcję charakterystyczną χ_A, zdefiniowaną wzorem $\chi_A(t) = 1$ dla $t \in A$ i $\chi_A(t) = 0$ dla $t \in T \setminus A$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §II.3.1: zadania 1 (bez d), e)) i 5.

§ 2. Bazy (skończone) przestrzeni wektorowych.

1. Definicje i przykłady.

Definicja. Ciąg $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ wektorów przestrzeni V nazywamy jej **bazą** (ściślej: **bazą uporządkowaną**), jeśli dla każdego wektora $\mathbf{v} \in V$ istnieje jedyny ciąg $(c_1, ..., c_k)$ skalarów taki, że $\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{v}_i$. Skalar c_i nazwiemy i-tą **współrzędną wektora v w bazie $\mathcal{V}$**, a ciąg współrzędnych $(c_1, ..., c_k) \in \mathbb{F}^k$ oznaczamy przez $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$.

Przykład 1. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$ i oznaczmy przez $\mathbf{e}_i \in \mathbb{F}^k$ wektor, którego i-ty wyraz jest równy 1, a pozostałe 0. Ponieważ $(\sum_i c_i \mathbf{e}_i = \mathbf{v}) \Leftrightarrow (c_1 = v_1, ..., c_k = v_k)$, więc $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{F}^k$. Oznaczamy ją przez $\mathcal{E}$ i nazywamy **bazą standardową**. (Taką „wzorcową" bazę wyróżnimy tylko w przestrzeniach współrzędnych!)

Przykład 2. Dla danych $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in \mathbb{F}^k$ utwórzmy $k \times k$ – macierz $\mathbf{A}$, której $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ są kolumnami. Twierdzimy, że $\mathcal{A} := (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k)$ wtedy i tylko wtedy jest bazą przestrzeni $\mathbb{F}^k$, gdy macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa.

Istotnie, dla zadanego wektora $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$ równość $v_1\mathbf{a}_1 + ... + v_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$ oznacza tyle, że $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ przy $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_k) \in \mathbb{F}^k$, patrz tożsamość (*) w II.5.2. Jeśli więc macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, to każdy wektor $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^k$ jednoznacznie przedstawia się w postaci kombinacji $v_1\mathbf{a}_1 + ... + v_k\mathbf{a}_k$, bo równanie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ma wtedy jedyne rozwiązanie. Przeciwnie, jeśli $\mathbf{0}_k$ jednoznacznie przedstawia się w postaci takiej kombinacji, to równanie

$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_k$ ma tylko zerowe rozwiązanie, skąd macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa.

Przykład 3. Gdy $R = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k : \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ jest niepustym zbiorem rozwiązań układu równań jednorodnych o zadanej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$, to umiemy efektywnie wyznaczyć pewną bazę przestrzeni R, zwaną w §II.3.4 układem fundamentalnym rozwiązań.

Przykład 4. Niech $V = \mathbb{F}_k[x]$ będzie przestrzenią wektorową wszystkich wielomianów nad $\mathbb{F}$ stopnia $\leq k$. Jedną z baz tej przestrzeni tworzą wielomiany $1, x, ..., x^k$. Ogólniej jednak, jeśli $f_0, ..., f_k$ są wielomianami takimi, że $\deg(f_n) = n$ dla $n = 0, 1, ..., k$, to $(f_0, ..., f_k)$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{F}_k[x]$. (Dowód: mamy wykazać, że dla każdego $f \in \mathbb{F}_k[x]$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $c_0, ..., c_k$ takich, że $f = c_0 f_0 + ... + c_k f_k$. Jest to oczywiste gdy $k = 0$, a dla $k > 0$ wykorzystujemy indukcję matematyczną: obieramy c_k tak, by wielomiany f i $c_k f_k$ miały równe współczynniki przy x^k, po czym korzystając z założenia indukcyjnego wyznaczamy $c_0, ..., c_{k-1}$ dla których $c_0 f_0 + ... + c_{k-1} f_{k-1} = f - c_k f_k$; wybory te są jednoznaczne.)

W szczególności, dla każdego $a \in \mathbb{R}$ ciąg $1, x - a, (x - a)^2, ..., (x - a)^k$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{R}_k[x]$. Współrzędne wektora $f \in \mathbb{R}_k[x]$ względem tej bazy $\mathcal{V}$ wyznaczyć można różniczkując n–krotnie równość $f(x) = c_0 + c_1(x - a) + ... + c_k(x - a)^k$:

$$d^n f(a) = n! c_n \quad \text{dla} \;\; n = 0, 1, ..., k, \quad \text{gdzie } d^n f \text{ jest } n\text{-tą pochodną funkcji } f.$$

Stąd $[f]_{\mathcal{V}} = (f(a), \frac{df(a)}{1!}, ..., \frac{d^k f(a)}{k!})$ (co jest twierdzeniem Taylora dla wielomianów).

Definicja. a) Gdy zmienimy numerację wektorówf bazy, znów otrzymamy bazę. Pozwala to nazwać niepusty skończony zbiór $A \subset V$ **bazą (nieuporządkowaną)** przestrzeni V, jeśli ustawiając jego elementy w ciąg (dowolny, byleby bez powtórzeń) otrzymamy bazę uporządkowaną.

b) Przyjmujemy też, że zbiór pusty jest bazą przestrzeni $\{\mathbf{0}\}$ (która to przestrzeń nie ma bazy uporządkowanej!).

c) Podobnie, bazą nazwiemy dowolny skończony **układ**[1] wektorów $(\mathbf{v}_t)_{t \in T}$ taki, że po ponumerowaniu zbioru T (w dowolny sposób, bez powtórzeń) otrzymujemy bazę uporządkowaną $(\mathbf{v}_{t_1}, ..., \mathbf{v}_{t_k})$. Gdy nie będzie oczywiste, czy rozważana właśnie baza jest układem wektorów, czy też ich zbiorem, będziemy to dodatkowo omawiać. (Zbiory też można traktować jako układy, ale tego już tu nie rozstrząsamy.)

W poniższych przykładach wygodnie jest używać baz nieuporządkowanych.

Przykład 5. Niech $\mathcal{M}_{l,k}$ będzie przestrzenią wszystkich $l \times k$–macierzy nad $\mathbb{F}$, z naturalnymi działaniami dodawania macierzy i mnożenia ich przez skalar. Dla $i = 1, ..., l$, $j = 1, ..., k$ oznaczmy przez $\mathbf{E}_{ij} \in V$ macierz o ij-tym wyrazie równym 1, a pozostałymi

[1] w ślad za [BB] **układem** elementów zbioru V nazywamy dowolną funkcję owartościach w V; przy tym układ $f : T \to V$ często oznaczamy też przez $(f_t)_{t \in T}$. Układem takim jest więc i każdy ciąg w V, skończony lub nie.

równymi 0. Wówczas dla $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{l,k}$ mamy $\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\mathbf{E}_{ij} = \mathbf{A}$; wynika stąd zarazem, że przedstawienie $\mathbf{A}$ w postaci kombinacji liniowej macierzy $\mathbf{E}_{ij}$ istnieje i jest jest jedyne. Zbiór macierzy $\{\mathbf{E}_{ij} : 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq k\}$ jest więc (nieuporządkowaną) bazą w $\mathcal{M}_{l,k}$, liczącą lk elementów.

Przykład 6. Niech W będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathcal{M}_k$, złożoną z macierzy symetrycznych. Bazą W jest zbiór macierzy $\mathbf{F}_{ij}$, $1 \leq i \leq j \leq k$, określonych tak: wyrazy ij-ty oraz ji-ty macierzy $\mathbf{F}_{ij}$ są równe 1, a pozostałe 0. Istotnie, $\mathbf{A} = \sum_{1\leq i\leq j\leq k} a_{ij}\mathbf{F}_{ij}$ jest jedynym przedstawieniem macierzy $\mathbf{A} \in W$ jako kombinacji liniowej macierzy $\mathbf{F}_{ij}$.

Ćwiczenie. Znaleźć bazę przestrzeni macierzy antysymetrycznych rozmiaru $k \times k$.

Ćwiczenie. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v} \in V$ w bazie $\mathcal{V}$, gdy
a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (1, 1)$, $\mathcal{V} = ((1, -1), (-2, 3))$;
b) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathbf{v} = 1 + x + x^2$, $\mathcal{V} = (x + x^2, x - x^2, 1 + x)$.

Uwaga 1. Nietrudno jest określić współrzędne wektora w bazie nieuporządkowanej; ponieważ nie są one ponumerowane, więc tworzą pewien układ, ale nie element przestrzeni $\mathbb{F}^k$. Baz uporządkowanych wygodnie jest zatem używać, gdy ważne jest ustalenie kolejności współrzędnych; w innych przypadkach równie dobre są bazy nieuporządkowane. Bazy uporządkowane oznaczamy dużymi literami pisanymi (np. $\mathcal{V}, \mathcal{W}$), a bazy będące zbiorami –dużymi literami drukowanymi (np. A, B), jak inne zbiory.

Uwaga 2. W tym wykładzie bazy są skończone. Niejednokrotnie wprowadza się też bazy nieskończone, które tu nazywamy bazami Hamela (patrz dalej w §4.4). Dla uniknięcia nieporozumień, skończoność baz niekiedy wyraźnie zaznaczamy.

Uwaga 3. Nie każda przestrzeń wektorowa ma bazę skończoną; jednak te, które ją mają, są tu najważniejsze.

Ćwiczenie. Udowodnić, że $\mathbb{F}[x]$, jako przestrzeń wektorowa opisana w przykładzie 3 z §1.2, nie ma bazy skończonej.

2. Rola współrzędnych względem bazy.

Przypomnijmy, że gdy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ jest bazą przestrzeni V, to przez $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ oznaczamy jedyny ciąg $(c_1, ..., c_k) \in \mathbb{F}^k$ taki, że $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{v}_i$.

Twierdzenie 1. *Przyporządkowanie każdemu wektorowi $\mathbf{v} \in V$ ciągu $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ jego współrzędnych w ustalonej bazie $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$, jest izomorfizmem liniowym przestrzeni V na $\mathbb{F}^k$, przeprowadzającym dla $i = 1, ..., k$ wektor $\mathbf{v}_i$ na $\mathbf{e}_i \in \mathbb{F}^k$. Izomorfizm odwrotny $\mathbb{F}^k \to V$ zadany jest wzorem $(c_1, ..., c_k) \mapsto \sum_i c_i\mathbf{v}_i$.*

Dowód. Z definicji bazy, przekształcenie $\mathbb{F}^k \ni (c_1, ..., c_k) \mapsto c_1\mathbf{v}_1 + ... + c_k\mathbf{v}_k \in V$ jest różnowartościowe i „na"; jest ono też liniowe. W ślad za nim, jego odwrotność (będąca przekształceniem $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ dla $\mathbf{v} \in V$) też jest izomorfizmem; patrz zad. 3 z §1.3. $\square$

Definicja. Każdy izomorfizm $V \to \mathbb{F}^k$ będziemy nazywać **mapą** przestrzeni V lub **układem współrzędnych** w V. Mapę, o której mowa w twierdzeniu, nazwiemy **wyznaczoną przez bazę** $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$.

Tak więc baza uporządkowana przestrzeni V wyznacza mapę, pozwalającą traktować V pod niejednym względem podobnie, jak znaną nam już przestrzeń współrzędnych. Nie jest to jedyna przyczyna, dla której dążyć możemy do wprowadzenia bazy w V: i gdy $V = \mathbb{F}^k$, odpowiedni wybór bazy znacznie upraszcza niektóre zagadnienia.

3. Wymiar przestrzeni wektorowej

Podstawowe znaczenie ma poniższe

Twierdzenie 1. *Każde dwie skończone bazy przestrzeni liniowej są równoliczne.*

Dowód. Niech jedna baza danej przestrzeni V liczy s, a inna t elementów. Możemy zakładać, że $s \geq 1$ i $t \geq 1$ (inaczej teza jest oczywista). Gdy bazy uporządkować, wyznaczą one na podstawie twierdzenia 1 z p.2 izomorfizmy $S : V \to \mathbb{F}^s$ i $T : V \to \mathbb{F}^t$. Odwzorowanie $T \circ S^{-1} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^t$ jest izomorfizmem (patrz zadanie 3 z §1.3), skąd $s \leq t$ na mocy stwierdzenia 1a) z p.3. Tak samo, $t \leq s$. $\square$

Definicja. Gdy przestrzeń V ma bazę złożoną z k wektorów to mówimy, że jej **wymiar** jest równy k i piszemy $\dim(V) = k$. (Odnotujmy, że $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$, bo zbiór pusty jest bazą przestrzeni $\{\mathbf{0}\}$.) Gdy V nie ma bazy skończonej, piszemy $\dim(V) = \infty$.

Przykład 1. a) przestrzeń $\mathbb{F}^k$ jest wymiaru k;
b) przestrzeń $\mathbb{F}_k[x]$ wielomianów stopnia $\leq k$ jest wymiaru $k + 1$;
c) Przestrzeń $\mathcal{M}_k(\mathbb{F})$ wszystkich $k \times k$ – macierzy jest wymiaru k^2, a jej poprzestrzeń złożona z macierzy symetrycznych jest wymiaru $k(k + 1)/2$.

Dla dowodu wystarcza odwołać się do przykładów 1,4,5 i 6 z p.4.

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §II.1.1: 8 b),d)* i 10; w §II.1.2: 2,3,7 (części tych zadań, dotyczące baz i wymiaru) i 9*.

§ 3. Bazy a przekształcenia liniowe.

1. Wyznaczanie przekształcenia przez wartości na wektorach bazy.

Twierdzenie 1. *Niech* $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ *będzie bazą przestrzeni* V. *Wówczas:*

a) Dla danej przestrzeni W i wektorów $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k \in W$, istnieje jedyne przekształcenie liniowe $L : V \to W$ takie, że $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ dla $i = 1, ..., k$.

b) Przekształcenie to jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ jest bazą przestrzeni W.

Dowód. Ad a). Jeśli L istnieje, to z liniowości otrzymujemy dla $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{v}_i$:

$$(*) \quad L(\sum_i c_i \mathbf{v}_i) = \sum_i c_i \mathbf{w}_i, \text{ lub inaczej: } L(\mathbf{v}) = \sum_i c_i \mathbf{w}_i, \text{ gdzie } (c_i) = [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}.$$

To dowodzi jedyności przekształcenia L. Jego istnienie wynika zaś stąd, że gdy wzoru (*) użyć jako definicji, to otrzymamy przekształcenie liniowe. (Sprawdzenie jest prostym ćwiczeniem, patrz jednak też niżej.)

Ad b). Zapiszmy wzór (*) tak: $L(\mathbf{v}) = T(S(\mathbf{v}))$, gdzie $S : V \to \mathbb{F}^k$ to mapa wyznaczona przez bazę $\mathcal{V}$ i $T(c_1, ..., c_k) = \sum_i c_i \mathbf{w}_i$ dla $c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}$. Przekształcenie S jest bijektywne, a $T : \mathbb{F}^k \to W$ jest takie wtedy i tylko wtedy, gdy układ $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$ jest bazą przestrzeni W (z definicji bazy). Zatem i bijektywność złożenia $L = T \circ S$ jest równoważna temu, by układ ten był bazą. $\square$

Uwaga 1. Gdy V i W są przestrzeniami współrzędnych, to uwaga 1 z §II.4.1 opisuje, jak szukać można macierzy $\mathbf{X} = [L]$ przekształcenia L, spełniającego warunek wymagany w a). Sprowadza się ona do tego, że $\mathbf{X}^t$ jest rozwiązaniem równania $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ to macierze o wierszach $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k$ i $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k$, odpowiednio. Nie jest do tego potrzebne, by układ $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ był bazą; jednak bez tego rozwiązań $\mathbf{X}$ może nie być lub być wiele.

Definicja. Dwie przestrzenie wektorowe są **izomorficzne**, gdy istnieje izomorfizm jednej z nich na drugą.

Wniosek 1. *Dwie przestrzenie wektorowe nad tym samym ciałem, posiadające bazy skończone, są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego wymiaru.*

Dowód. Gdy istnieje izomorfizm $V \to W$, to przeprowadza on bazę przestrzeni V na (równoliczną z nią) bazę przestrzeni W, wobec czego $\dim(V) = \dim(W)$. Przeciwnie, gdy przestrzenie V i W mają bazy $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ i $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^k$ mocy $k < \infty$, to na podstawie twierdzenia istnieje izomorfizm $L : V \to W$, wyznaczony warunkiem $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ dla $i = 1, ..., k$. (Tu, $k \geq 1$, lecz teza oczywiście pozostaje słuszna gdy $k = 0$.) $\square$

2. Macierze przekształceń liniowych w bazach skończonych.

Pokażemy teraz, jak – przy wybranych bazach dziedziny i przeciwdziedziny– przekształceniu liniowemu dogodnie przyporządkować macierz. W ten sposób rozszerzymy, na przekształcenia pomiędzy przestrzeniami z wyróżnionymi bazami, omawianą w rozdziale II odpowiedniość pomiędzy przekształceniami liniowymi a macierzami.

Definicja. Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l)$ będą bazami przestrzeni V i W, odpowiednio. Bazy te wyznaczają mapy: $S : V \to \mathbb{F}^k$ i $T : V \to \mathbb{F}^l$. Dla zadanego $L \in \mathcal{L}(V, W)$, przekształcenie $T \circ L \circ S^{-1} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest poprawnie określone i liniowe; powiemy, że **odpowiada** ono przekształceniu L w bazach $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ (lub: **w mapach** S, T). Jak każde przekształcenie liniowe $\mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$, wyznaczone ono jest przez dokładnie jedną $l \times k$–macierz. Nazywamy ją **macierzą przekształcenia** L **w bazach** $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ (lub: **w mapach** S, T**)** i oznaczamy $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$.

Uwaga 1. Wygodnie jest definicję macierzy przekształcenia zapisać w postaci następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow[L]{} & W \\ \downarrow{\scriptstyle S} & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ \mathbb{F}^k & \xrightarrow[L_{\mathbf{A}}]{} & \mathbb{F}^l \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{przy } \mathbf{A} = [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} := [T \circ L \circ S^{-1}] \\ \text{złożenia } T \circ L \ \text{ i } \ L_{\mathbf{A}} \circ S \text{ są równe} \end{array} \tag{1}$$

Zaświadcza on, że w omawianych mapach przekształceniu L odpowiada przekształcenie $L_{\mathbf{A}}$. Mówimy też, że **w bazach** $\mathcal{V}, \mathcal{W}$**, przekształcenie** L **jest zadane wzorem** $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$, bo L przekształca wektor $\mathbf{v}$ o współrzędnych $(x_1, ..., x_k)$ względem bazy $\mathcal{V}$, na wektor $\mathbf{w}$ o współrzędnych $\mathbf{Ax}$ względem bazy $\mathcal{W}$.

Wyznaczmy kolumny macierzy $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$.

Stwierdzenie 1. *j–ta kolumna macierzy $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ jest ciągiem współrzędnych, w bazie $\mathcal{W}$, wektora $L(\mathbf{v}_j)$. Równoważnie: macierz $\mathbf{A} = [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \in \mathcal{M}_{l,k}$ jest wyznaczona warunkami*

$$L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{l} a_{ij} \mathbf{w}_i \quad \text{dla } j = 1, ..., k \tag{2}$$

Dowód. Ciąg współrzędnych wektora $\mathbf{v}_j$ względem bazy $\mathcal{V}$ jest równy $\mathbf{e}_j \in \mathbb{F}^k$. Z uwagi wynika więc, że ciąg współrzędnych wektora $L(\mathbf{v}_j)$ względem bazy $\mathcal{W}$ jest równy $\mathbf{Ae}_j$, tzn. j–tej kolumnie macierzy $\mathbf{A}$. $\square$

Zbadamy teraz własności macierzy przekształcenia.

Twierdzenie 1. *Przy oznaczeniach definicji,*

a) $[L(\mathbf{v})]_{\mathcal{W}} = [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} [\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$ dla $\mathbf{v} \in V$;

b) dla danej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $L : V \to W$ takie, że $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = \mathbf{A}$;

c) Przyporządkowanie $L \mapsto [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ jest liniowe, tzn.

$$[K+L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = [K]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} + [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \ \text{ i } \ [cL]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = c[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \text{ dla } K, L \in \mathcal{L}(V,W) \text{ i } c \in \mathbb{F}.$$

Dowód. a) odpowiada równości obu złożeń w diagramie (1), patrz uwaga 1. Podobnie, gdy w (1) potraktować $L_{\mathbf{A}}$ jako zadane przekształcenie liniowe, to wyznacza ono jednoznacznie przekształcenie liniowe $L := T^{-1} \circ L_{\mathbf{A}} \circ S$ takie, że $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = \mathbf{A}$. Natomiast c) wynika bezpośrednio z równości (2). □

Twierdzenie 2. *Niech $K : U \to V$ i $L : V \to W$ będą przekształceniami liniowymi, a $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ – bazami przestrzeni U, V i W odpowiednio. Wówczas*

$$[L \circ K]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}} = [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}[K]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}} \qquad \text{(po prawej jest iloczyn macierzy).}$$

Dowód. Dla każdego $\mathbf{u} \in U$ otrzymujemy:

$$[L \circ K)(\mathbf{u})]_{\mathcal{W}} = [(L(\mathbf{u}))]_{\mathcal{W}} = [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}[K(\mathbf{u})]_{\mathcal{V}} = [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}([K]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{U}}) = ([L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}[K]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}})[\mathbf{u}]_{\mathcal{U}}.$$

Oznacza to, że $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}[K]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{V}}$ spełnia warunek charakteryzujący macierz $[L \circ K]^{\mathcal{U}}_{\mathcal{W}}$. □

Uwaga 2. Oba twierdzenia podsumować można tak: przyporządkowanie każdemu przekształceniu $L \in \mathcal{L}(V,W)$ jego macierzy w ustalonych bazach jest izomorfizmem przestrzeni wektorowej $\mathcal{L}(V,W)$ na przestrzeń wektorową $\mathcal{M}_{l,k}$, gdzie $l = \dim(W), k = \dim(V)$. Ponadto, przy dowolnym wyborze baz $\mathcal{U}$ w U, $\mathcal{V}$ w V i $\mathcal{W}$ w W, składaniu przekształceń $U \to V$ i $V \to W$ odpowiada mnożenie macierzy.

Uwaga 3. Wynika stąd już, że izomorfizmom liniowym odpowiadają macierze nieosobliwe (=odwracalne), i vice versa. Istotnie, gdy przekształcenia $K \in \mathcal{L}(V,W)$ i $L \in \mathcal{L}(W,V)$ są wzajemnie odwrotne, to

$$[L]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}[K]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} = [L \circ K]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}} = [I_V]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}} = \mathbf{I}_s, \text{ gdzie } s = \dim(V) = \dim(W),$$

i tak samo $[K]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}[L]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}} = \mathbf{I}_s$. Jeśli więc $K \in \mathcal{L}(V,W)$ jest izomorfizmem, to macierz $[K]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ jest odwracalna, a zamieniając rolę macierzy i przekształceń dowodzimy w taki sam sposób implikacji odwrotnej.

Zadanie 1. i) Jaki jest związek między $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ a $[L]^{\mathcal{V}'}_{\mathcal{W}}$, jeśli $\mathcal{V}'$ otrzymano z bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ przez a) zastąpienie wektora $\mathbf{v}_i$ wektorem $c\mathbf{v}_i$? b) zastąpienie go wektorem $\mathbf{v}_i + c\mathbf{v}_j$? c) zamianę wektorów $\mathbf{v}_i$ i $\mathbf{v}_j$ miejscami? (Tu $1 \le i, j \le k$ i $c \in \mathbb{F}$.)

ii) A pomiędzy $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ a $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}'}$, jeśli $\mathcal{W}'$ w podobny sposób otrzymano z $\mathcal{W}$?

Zadania ze zbioru Kostrykina: 3,4 w §II 1.3; 22 (z ∀ zamiast ∃) i 23 w §II.3.1.

3. Zmiana bazy i jej wpływ na macierz przekształcenia liniowego.

Ustalmy dwie bazy przestrzeni V: „starą” bazę $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i „nową” $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_k)$. Dla opisania, jak zmienia się macierz przekształcenia przy zmianie baz, rozważmy macierz $\mathbf{C} := [I_V]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$, którą nazwiemy **macierzą zmiany bazy** z $\mathcal{V}$ na $\mathcal{W}$. Zgodnie z definicją z p.2, $\mathbf{C}$ jest $k \times k$–macierzą, której j-tą kolumną, dla $1 \leq j \leq k$, jest ciąg $[\mathbf{w}_j]_{\mathcal{V}}$ współrzędnych, względem starej bazy, j–tego wektora bazy nowej. (Tak więc $\mathbf{w}_j = \sum_i c_{ij}\mathbf{v}_i$.) W szczególności, $[I_V]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = \mathbf{I}$, dla każdej bazy $\mathcal{V}$.

Niech teraz $L \in \mathcal{L}(V', V)$, przy czym w przestrzeni V' również wyróżniono bazę „starą” $\mathcal{V}' = (\mathbf{v}'_1, ..., \mathbf{v}'_n)$ i „nową” $\mathcal{W}' = (\mathbf{w}'_1, ..., \mathbf{w}'_n)$. Rozpatrujemy też macierz $\mathbf{C}' := [I_{V'}]_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{W}'}$ zmiany baz, przy czym niżej piszemy I i I' zamiast I_V i $I_{V'}$, odpowiednio.

Twierdzenie 1. *Przy tych oznaczeniach,*

a) Macierz zmiany bazy $\mathbf{C} := [I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ *jest odwracalna i jej odwrotnością jest* $[I]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$

b) $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}'} = \mathbf{C}^{-1}[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}\mathbf{C}'$

c) dla $\mathbf{v} \in V$ *zachodzi* $[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}} = \mathbf{C}[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}}$, *lub równoważnie* $[\mathbf{v}]_{\mathcal{W}} = \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{V}}$.

<u>Dowód.</u> Ponieważ $L = I \circ L \circ I'$ i $I = I \circ I$, więc na mocy twierdzenia 2 z p.2,

$$[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}'} = [I]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}'}[I']_{\mathcal{V}'}^{\mathcal{W}'} \quad \text{i} \quad [I]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}[I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = [I \circ I]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{W}} = \mathbf{I}_k.$$

Stąd wynikają obie części a) i b). Natomiast w c) pierwsza równość wynika z własności macierzy $[I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$, a druga – z pierwszej i a). □

Najważniejszy dla dalszej części jest przypadek, gdy $V' = V$, $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ i $\mathcal{W}' = \mathcal{W}$. Dla krótkości, macierz $[L]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ oznaczamy wtedy $[L]_{\mathcal{V}}$ i nazywamy macierzą przekształcenia $L : V \to V$ **w bazie** $\mathcal{V}$. Zależność b) przyjmuje charakterystyczną postać

$$[L]_{\mathcal{W}} = \mathbf{C}^{-1}[L]_{\mathcal{V}}\mathbf{C} \text{ lub równoważnie } [L]_{\mathcal{V}} = \mathbf{C}[L]_{\mathcal{W}}\mathbf{C}^{-1}, \text{ gdzie } \mathbf{C} = [I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}.$$

<u>Ćwiczenie.</u> Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ oraz $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ będą bazami przestrzeni V, przy czym $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3$. Niech $L \in \mathcal{L}(V, V)$. Znaleźć macierze $[I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$, $[\mathrm{L}]_{\mathcal{V}}$ i $[L]_{\mathcal{W}}$ jeśli wiadomo, że $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>Oznaczenie</u> Macierz, której j–tą kolumną jest wektor $[\mathbf{w}_j]_{\mathcal{V}}$ ($j = 1, ..., n$) możemy rozważać i gdy $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n)$ jest dowolnym ciągiem wektorów przestrzeni V, niekoniecznie będącym bazą. Oznaczamy ją nadal $[I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$.

Twierdzenie 2. *Układ* $\mathcal{W}$ *wtedy i tylko wtedy jest bazą przestrzeni* V*, gdy macierz* $[I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ *jest nieosobliwa. (Zakładamy nadal, że* $\mathcal{V}$ <u>*jest*</u> *bazą.)*

Dowód. Oznaczmy przez $L : V \to \mathbb{F}^k$ mapę, wyznaczoną przez bazę $\mathcal{V}$. Jest ona izomorfizmem, skąd układ $\mathcal{W}$ wtedy i tylko wtedy jest bazą przestrzeni V, gdy jest nią układ $L(\mathbf{w}_1), ..., L(\mathbf{w}_n)$. (Patrz twierdzenie 1b) z p.1.) Jak wiemy, jeśli ostatni układ jest bazą, to $n = k$. Ponieważ $L(\mathbf{w}_1), ..., L(\mathbf{w}_n)$ są kolejnymi kolumnami macierzy $[I]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$, więc pozostaje wykorzystać przykład 2 z §2.1. □

Uwaga 1. Dla bazy $\mathcal{V}$ i układu wektorów $\mathcal{W}$ przestrzeni V, macierz $[I]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ pozwala więc sprawdzić, czy $\mathcal{W}$ też jest bazą; a gdy nią jest, to można przy pomocy tej macierzy wyrazić tak współrzędne wektora w „nowej" bazie $\mathcal{W}$ przez współrzędne w starej, jak i macierz przekształcenia w nowej bazie przez jego macierz w starej.

Wniosek 1. *Dla zadanej bazy $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ i* nieosobliwej *macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ istnieje dokładnie jedna baza $\mathcal{W}$ taka, że macierz $[I]^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}$ przejścia z $\mathcal{V}$ do $\mathcal{W}$ jest równa $\mathbf{A}$.*

Dowód. Jeśli baza $\mathcal{W}$ istnieje, to jej j–ty wektor $\mathbf{w}_j$ jest zadany wzorem $\mathbf{w}_j = \sum_i a_{ij}\mathbf{v}_i$. To, że wzór ten określa bazę, wynika z twierdzenia 2. □

Zadania ze zbioru Kostrykina: w §II.1.1:10–13; w §II.3.1:15 (bez b),c),d),e)),16 i 19–21.

4. Jeszcze o izomorfizmie $\mathcal{L}(V, W)$ na $\mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ dla $k = \dim(V), l = \dim(W)$.

(Wykład 15 lub materiał uzupełniający.)

Powróćmy do przyporządkowania przekształceniom $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ich macierzy $[L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$ w ustalonych bazach $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_j)_{j=1}^k$ przestrzeni V i $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_i)_{i=1}^l$ przestrzeni W. Jak wiemy z uwagi 2 w p.2, otrzymane przekształcenie, które oznaczymy przez S, jest izomorfizmem $\mathcal{L}(V, W)$ na $\mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$. A że $\dim(\mathcal{M}_{l,k}) = kl$, więc

Wniosek 1. *Wymiar przestrzeni liniowej $\mathcal{L}(V, W)$ jest równy* $\dim(V) \cdot \dim(W)$.

Znamy też bazę $\{\mathbf{E}_{ij} : 1 \le i \le l, 1 \le j \le k\}$ przestrzeni $\mathcal{M}_{l,k}$, patrz przykład 5 w §2.1. Ponieważ $S^{-1} : \mathcal{M}_{l,k} \to \mathcal{L}(V, W)$ jest izomorfizmem, więc bazą przestrzeni $\mathcal{L}(V, W)$ jest zbiór przekształceń $L_{ij} := S^{-1}(\mathbf{E}_{ij})$. Stosując wzór (2) z p.2 do $L = L_{ij}$ i $\mathbf{A} = \mathbf{E}_{ij}$ stwierdzamy, że przekształcenie $L_{ij} \in \mathcal{L}(V, W)$ jest wyznaczone warunkami

$$L_{ij}(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_i \text{ oraz } L_{ij}(\mathbf{v}_s) = \mathbf{0} \text{ dla } s \in \{1, ..., k\} \setminus \{j\}. \tag{3}$$

Na koniec, niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\mathbf{A} := [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}$. Wówczas $\mathbf{A} = \sum_{i,j} a_{ij}\mathbf{E}_{ij}$, co (wobec liniowości S^{-1} i równości $L = S^{-1}(\mathbf{A}), L_{ij} = S^{-1}(\mathbf{E}_{ij})$) daje $L = \sum_{i,j} a_{ij}L_{ij}$, gdzie zakres sumowania to $1 \le i \le l, 1 \le j \le k$. Otrzymaliśmy

Wniosek 2. *Zbiór zdefiniowanych wyżej przekształceń L_{ij} jest bazą przestrzeni liniowej $\mathcal{L}(V, W)$, i każde przekształcenie $L \in \mathcal{L}(V, W)$ przedstawia się (jednoznacznie) jako kombinacja $L = \sum_{i,j} a_{ij}L_{ij}$, gdzie a_{ij} to wyrazy macierzy $\mathbf{A} := [L]^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}} \in \mathcal{M}_{l,k}$.*

Ważny jest przypadek, gdy $W = \mathbb{F}$. Przekształcenia liniowe $\ell : V \to \mathbb{F}$ nazywamy **funkcjonałami (liniowymi)** na przestrzeni V, a przestrzeń liniową $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ nazywamy **sprzężoną do** V i oznaczamy V^*. Wzór (3) określa dla $\mathcal{W} = (\mathbf{w}_1)$, gdzie $\mathbf{w}_1 = 1$ (jest to baza przestrzeni $\mathbb{F}$!) **bazę przestrzeni** V^***, sprzężoną do bazy** $\mathcal{V}$ **przestrzeni** V; jej j-ty element oznacza się często $\mathbf{v}_j^*$. Tak więc

Wniosek 3. *Wymiar przestrzeni* $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ *jest równy wymiarowi przestrzeni* V*. Dla zadanej bazy* $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_j)_{j=1}^k$ *przestrzeni* V*, bazą przestrzeni* V^* *jest* $\mathcal{V}^* = (\mathbf{v}_j^*)_{j=1}^k$*, gdzie funkcjonał* $\mathbf{v}_j^*$ *zadany jest warunkami* $\mathbf{v}_j^*(\mathbf{v}_s) = 0$ *gdy* $s \neq j$ *i* $\mathbf{v}_j^*(\mathbf{v}_j) = 1$.

Zadanie 1. Niech $\ell \in V^*$. Dowieść, że każdy z ciągów $[\ell]_{\mathcal{V}^*}$ i $(\ell(\mathbf{v}_i))_{i=1}^k$ jest równy jedynemu wierszowi macierzy $[\ell]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$, dla $\mathcal{W} = (1)$.

§ 4. Konstrukcja baz.

1. Charakteryzacja baz przez liniową niezależność i generowanie.

Definicja bazy oparta jest na dwóch jej własnościach: możliwości przedstawienia dowolnego wektora w postaci kombinacji liniowej wektorów bazy, i jedyności tej kombinacji. Wygodnie jest te własności badać osobno.

Definicja. Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ będzie układem wektorów przestrzeni V.

a) Powiemy, że układ $\mathcal{V}$ jest **liniowo zależny**, jeśli istnieją skalary $c_1, ..., c_k$, nie wszystkie równe zeru, dla których $\sum c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

b) W przeciwnym razie układ $\mathcal{V}$ nazwiemy **liniowo niezależnym**. (Jest tak więc, jeśli z równości $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ wynika, że $c_i = 0$ $\forall i$.)

c) Powiemy, że układ $\mathcal{V}$ **rozpina** (lub: **generuje**) przestrzeń V, jeśli każdy wektor $\mathbf{v} \in V$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ (tzn. dla każdego wektora $\mathbf{v} \in V$ istnieją skalary $c_1, ..., c_k$ takie, że $\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{v}_i$).

Twierdzenie 1. *Układ* $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ *wektorów przestrzeni* V *wtedy i tylko wtedy jest jej bazą, gdy rozpina* V *i jest liniowo niezależny.*

Dowód. Z definicji wynika, że gdy układ $\mathcal{V}$ jest bazą, to rozpina V, a także jest liniowo niezależny (bo przedstawienie $\mathbf{0} = \sum_i 0\mathbf{v}_i$ jest jednoznaczne).

Przeciwnie, gdy układ $\mathcal{V}$ rozpina V, to dla każdego wektora $\mathbf{v}$ istnieją $c_1, ..., c_k \in \mathbb{F}$ takie, że $\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{v}_i$. Gdy zaś $\mathcal{V}$ jest też liniowo niezależny, to współczynniki c_i są przez $\mathbf{v}$ wyznaczone jednoznacznie: z równości $\mathbf{v} = \sum_i c_i \mathbf{v}_i = \sum_i d_i \mathbf{v}_i$ wynika bowiem, że $\sum_i (c_i - d_i)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, skąd $c_i - d_i = 0$ $(i = 1, ..., k)$ na podstawie liniowej niezależności. Wobec tego liniowo niezależny układ, rozpinający przestrzeń, jest jej bazą. □

Wygodnie jest generowanie i liniową niezależność omówić dokładniej.

Definicja. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni V. Gdy $A \neq \emptyset$, oznaczmy przez $\mathrm{lin}(A)$ zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów zbioru A; przyjmijmy też $\mathrm{lin}(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$. Tak więc dla $A \neq \emptyset$,

$$\mathrm{lin}(A) := \{\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{v}_i : n \in \mathbb{N}, c_1, ..., c_n \in \mathbb{F},\ \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n \in A\}.$$

Zbiór $\mathrm{lin}(A)$ nazywamy **powłoką liniową** zbioru A; mówimy też, że jest on (liniowo) **generowany** lub **rozpięty** przez A. Zamiast $\mathrm{lin}(\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\})$ piszemy też $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ bądź $\mathbb{F}\mathbf{v}_1 + ... + \mathbb{F}\mathbf{v}_k$.

Twierdzenie 2. *Powłoka liniowa zbioru $A \subset V$ jest podprzestrzenią przestrzeni V; ponadto, jest to najmniejsza podprzestrzeń spośród tych, które zawierają zbiór A.*

Dowód. Teza oznacza, że zbiór $\mathrm{lin}(A)$ ma takie własności:
i) $\mathrm{lin}(A)$ jest podprzestrzenią przestrzeni V,
ii) $A \subset \mathrm{lin}(A)$, oraz
iii) $\mathrm{lin}(A)$ jest podzbiorem każdej podprzestrzeni, która zawiera A.
Własności te wynikają jednak wprost z przyjętych definicji. ⊟

Wniosek 1. *Jeśli* $A \subset \mathrm{lin}(B)$, *to* $\mathrm{lin}(A) \subset \mathrm{lin}(B)$ *(i odwrotnie też).*

Przyjmując $B = A \cup \{\mathbf{v}\}$ otrzymujemy

Wniosek 2. *Jeśli* $\mathbf{v} \in \mathrm{lin}(A)$, *to* $\mathrm{lin}(A \cup \{\mathbf{v}\}) = \mathrm{lin}(A)$. □

Umowa. Dla uproszczenia języka mówimy „wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ są liniowo (nie)zależne", lub też: „wektory te rozpinają daną podprzestrzeń", gdy taką własność ma układ $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$, a nie wtedy, gdy ma ją każdy z wektorów $\mathbf{v}_i$. (Podobnie „Asia i Kasia są równego wzrostu" nie oznacza, że każda z nich jest równego wzrostu.)

Definicja. Podzbiór A przestrzeni wektorowej jest liniowo zależny, jeśli istnieją różne wektory $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in A$ i skalary $c_1, ..., c_k$, nie wszystkie równe 0, dla których $\sum_i c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. W przeciwnym razie zbiór A nazwiemy liniowo niezależnym.

Lemat 1. *a) Jeśli układ* $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ *jest liniowo zależny, to* $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ *lub pewien wektor* $\mathbf{v}_j$ *jest kombinacją liniową poprzedzających go wektorów* $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{j-1}$.
b) Gdy zbiór A jest liniowo niezależny, a $A \cup \{\mathbf{v}\}$ liniowo zależny, to $\mathbf{v} \in \mathrm{lin}(A)$.

Dowód. a) Z założenia wynika istnienie skalarów $c_1, ..., c_k$, nie wszystkich równych zeru, dla których $\sum_i c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Niech $j = \max\{i : c_i \neq 0\}$. Jeśli $j = 1$, to $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, a w przeciwnym razie $\mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{j-1} (-c_i/c_j)\mathbf{v}_i$. □
b) Dowód jest analogiczny i pozostawiony jako ćwiczenie. ⊟

Uwaga 1. a) Gdy $V = \mathbb{R}^3$ możemy wiązać z powłoką liniową następujące geometryczne wyobrażenia. Dla $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ mamy $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1) = \{\mathbf{0}\}$, a dla $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ zbiór $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1)$ jest prostą wyznaczoną przez wektor $\mathbf{v}_1$ (a ściślej: przez środek układu i koniec zaczepionego w nim wektora $\mathbf{v}_1$). Dalej, gdy $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, to $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ jest płaszczyzną wyznaczoną przez $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ gdy wektory te nie są współliniowe, a prostą $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1)$ gdy są. Wreszcie dla niewspółliniowych wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, zbiór $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ jest płaszczyzną $\mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ gdy $\mathbf{v}_3$ do niej należy, a w przeciwnym razie jest przestrzenią $\mathbb{R}^3$.

Nie podajemy tu dowodu tych obserwacji, bo musiałby on odwoływać się do tego, czym są prosta i płaszczyzna w $\mathbb{R}^3$. (W rozdziale VIII zdefiniujemy je przy pomocy algebry liniowej, a więc i przy pomocy powyższej uwagi!) Jest jednak „widoczne", że wektory proporcjonalne do ustalonego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ tworzą prostą, zbiór kombinacji liniowych dwóch wektorów niewspółliniowych – płaszczyznę, a zbiór kombinacji trzech wektorów nie leżących na wspólnej płaszczyźnie -przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

b) Z a) i lematu 1a) wynika następująca interpretacja liniowej niezależności wektorów $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$: są one liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_2$ nie leży na prostej wyznaczonej przez $\mathbf{v}_1$, oraz $\mathbf{v}_3$ nie leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$. (Kolejność okazuje się być nieistotna!) Przez analogię, możemy podobnie myśleć o liniowej niezależności w innych przestrzeniach wektorowych.

Uwaga 2. Przypomnijmy, że gdy $V = \mathbb{F}^l$ jest przestrzenią współrzędnych, to liniową zależność wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k \in \mathbb{F}^l$ umiemy badać <u>algebraicznie</u>: należy ustalić, czy układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, o macierzy $\mathbf{A}$ której wektory te są kolumnami, ma niezerowe rozwiązanie. (Patrz §II.5.3.) Podobnie, umiemy badać powłokę liniową tych wektorów: jest nią przestrzeń kolumn macierzy $\mathbf{A}$ (patrz §II.5.2 i §II.5.3).

Zadanie 1. Dla zbiorów $A_1, ..., A_k \subset V$ przyjmijmy $\sum_{i=1}^k A_i := \{\mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k : \mathbf{v}_1 \in A_1, ..., \mathbf{v}_k \in A_k\}$. Dowieść, że

a) $\mathrm{lin}(A \cup B) = \mathrm{lin}(A) + \mathrm{lin}(B)$, skąd $\mathrm{lin}(A \cup B) = \mathrm{lin}(A' \cup B)$ gdy $\mathrm{lin}(A) = \mathrm{lin}(A')$.

b) Jeśli $V_1, ..., V_k$ są podprzestrzeniami, to $\mathrm{lin}(V_1 \cup ... \cup V_k) = \sum_{i=1}^k V_i$.

Odnotujmy też, jak wprowadzone pojęcia zachowują się przy przekształceniach:

Zadanie 2. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i niech $A \subset V$. Udowodnić, że

a) Jeśli zbiór A jest liniowo zależny, to $L(A)$ też.

b) Implikacja odwrotna jest słuszna gdy $\ker(L) = \{\mathbf{0}\}$.

c) Ma miejsce równość $L(\mathrm{lin}(A)) = \mathrm{lin}(L(A))$.

Zadanie 3. (Por. dowód tw. 2 w §3.2.) Niech $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k)$ będzie bazą przestrzeni V. Dla układu $\mathcal{W}$ wektorów $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n \in V$ dowieść równoważności warunków: a) wektory te są liniowo niezależne (odpowiednio: rozpinają przestrzeń V), i b) kolumny macierzy $[I]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ są liniowo niezależne (odp. rozpinają przestrzeń $\mathbb{F}^k$).

Zadania uzupełniające.

1. Niech funkcje $f_1, ..., f_n : T \to \mathbb{R}$ i punkty $t_1, ..., t_n \in T$ mają tę własność, że $f_i(t_i) \neq 0$ i $f_i(t_j) = 0$ dla $1 \leq i < j \leq n$. Dowieść, że funkcje te są liniowo niezależne, jako wektory przestrzeni $\mathbb{R}^T$.

2. Niech V będzie k–wymiarową przestrzenią nad ciałem o $q < \infty$ elementach.
   a) Ile jest wektorów w przestrzeni V?
   b) Dla $s = 1, ..., k$, ile jest liniowo niezależnych układów $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s)$?
   c) A ile jest s–wymiarowych podprzestrzeni przestrzeni V, dla s j.w.?

Zadania ze zbioru Kostrykina: 5,7,8,9,10 w §I.2.1 i 2,3,4,8c)**,d)*,9 w §II.1.1.

2. Lemat o wymianie.

Okazuje się, że z dwóch zbiorów, z których jeden rozpina V, a drugi jest liniowo niezależny, skleić można zręcznie zbiór będący bazą. Mówi o tym ważny

Lemat 1 („o wymianie”). *Niech A i B będą skończonymi podzbiorami przestrzeni V, przy czym A jest liniowo niezależny, a B rozpina V. Wtedy*
a) istnieje zbiór $B_0 \subset B$ taki, że $A \cup B_0$ jest bazą przestrzeni V, oraz
b) $\#A \leq \#B$, gdzie $\#$ oznacza moc zbioru.

Dowód. a) Ustawmy elementy zbioru $A \cup B$ w ciąg, w którym te ze zbioru A występują na początku. Następnie, począwszy od ostatniego, usuwajmy z ciągu wektory, będące kombinacją liniową wcześniejszych. Usunięcia te nie zmieniają powłoki liniowej rozpatrywanych układów (patrz wniosek 2 z p.1), skąd otrzymany układ końcowy nadal rozpina przestrzeń V. Jest on więc jej bazą, bo na mocy lematu 1a) z p.1 jest liniowo niezależny. Ponadto, w żadnym kroku nie usunęliśmy elementu zbioru A, bo te poprzedzają pozostałe i zbiór A jest liniowo niezależny. Otrzymana baza jest więc żądanej postaci $A \cup B_0$, gdzie $B_0 \subset B$.

b) Zastosujmy a) dwukrotnie, raz przy $A = \emptyset$; otrzymamy bazy $A \cup B_0$ i B_1, dla $B_0, B_1 \subset B$. A że bazy są równoliczne, to $\#A \leq \#(A \cup B_0) = \#B_1 \leq \#B$. $\square$

Gdy zbiór $A \cup B_0$ jest bazą przestrzeni V i $A \cap B_0 = \emptyset$, to mówimy, że **rozszerzyliśmy** A, zbiorem B_0, **do bazy**. Liniowo niezależny zbiór A można więc pewnym podzbiorem skończonego zbioru generującego rozszerzyć do bazy. Dla $A = \emptyset$ daje to

Wniosek 1. *Skończony zbiór, generujący przestrzeń wektorową, zawiera jej bazę.*

Ćwiczenie. a) Rozszerzyć zbiór $\{x^2 - x, x^4 + x\}$ do bazy przestrzeni $\mathbb{R}_4[x]$.
b) Znaleźć wszystkie bazy przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$, zawarte w $\{1, x, x^2 - x, x^2 + x, x^3 + x^2\}$.

Gdy V jest podprzestrzenią przestrzeni współrzędnych $\mathbb{F}^k$, sposób rozszerzenia zbioru liniowo niezależnego do bazy podany będzie w p.5.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 12 i 13 w §I.2.1.

Zadania uzupełniające. (o kombinatorycznych zastosowaniach lematu o wymianie).

Część b) lematu ma zaskakująco bogate zastosowania kombinatoryczne i geometryczne, dyskutowane w książce L. Babai'a i P.Frankla „Linear Algebra Methods in Combinatorics" (U. of Chicago, preprint z 1992r.) Oto dwa przykłady, wykorzystujące niestety pojęcie, które dokładniej omówimy dopiero w rozdziale V.

1. * Zdefiniujmy odległość od $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$ do $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^k$ jako liczbę $||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$, gdzie $||\mathbf{u}|| := \sqrt{\sum_{i=1}^k u_i^2}$ dla $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^k$. Okazuje się, że jeśli moc zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$ jest większa od $(k+1)(k+4)/2$, to wśród odległości $||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$, gdzie $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$ przebiegają A, istnieją trzy różne. Dowieść tego na następującej drodze: przypuśćmy, że wśród tych liczb istnieją tylko c i d (dopuszczamy $c = d$).

a) Dla $\mathbf{v} \in A$ niech funkcja $f_\mathbf{v} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ zdefiniowana będzie wzorem $f_\mathbf{v}(\mathbf{x}) := (||\mathbf{x} - \mathbf{v}||^2 - c^2)(||\mathbf{x} - \mathbf{v}||^2 - d^2)$. Dowieść, że zbiór funkcji $\{f_\mathbf{v} : \mathbf{v} \in A\}$ jest liniowo niezależny. (Wskazówka: zad. uz. z p.1.)

b) Dowieść, że $f_\mathbf{v}$ leży w podprzestrzeni generowanej przez następujące funkcje: $||\mathbf{x}||^4,\ ||\mathbf{x}||^2 x_i,\ x_i x_j,\ x_i,\ 1$, gdzie $i \leq j$ przebiegają $1, ..., k$. Moc zbioru A nie przekracza więc liczby tych funkcji.

2. * Dowieść podobnie, że jeśli $\#A > k + 1$, to wśród liczb $||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$ ($\mathbf{v}, \mathbf{w} \in A$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$) istnieją dwie różne.

Problem 1. (otwarty). Niech $p_k(n)$ oznacza moc najliczniejszego zbioru $A \subset \mathbb{R}^k$ takiego, że wśród liczb $||\mathbf{v}-\mathbf{w}||$ ($\mathbf{v}, \mathbf{w} \in A$ i $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$) istnieje $\leq n$ różnych. Z zadań 1 i 2 wynika, że $p_k(1) = k + 1$ (wartość tę realizują wierzchołki k–wymiarowego odpowiednika foremnego trójkąta czy czworościanu), i że $p_k(2) \leq (k + 1)(k + 4)/2$. Jednak dokładna wartość liczb $p_k(2)$, a tym bardziej $p_k(n)$ dla $n > 2$, nie jest znana.

3. Ważne konsekwencje lematu o wymianie.

Definicja. Przestrzeń wektorową, generowaną przez pewien jej podzbiór skończony, nazywamy **skończenie generowaną**.

Przestrzeń taka ma na mocy wniosku 1 w p.2 bazę skończoną, skąd jej wymiar jest dobrze określoną liczbą. Zamiast mówić o przestrzeni V, że jest skończenie generowana, mówimy więc też, że jest **skończenie wymiarowa** i piszemy $\dim(V) < \infty$.

W dalszej części, gdy mowa o przestrzeni k–wymiarowej zakładamy, że $k < \infty$.

Twierdzenie 1. *Niech V będzie k-wymiarową przestrzenią wektorową, a A zbiorem jej wektorów, liczącym k elementów. Wówczas następujące warunki są równoważne:*
a) A rozpina przestrzeń V;
b) A jest zbiorem liniowo niezależnym.
c) A jest bazą przestrzeni V.

Dowód. a)⇒c). Jeśli A rozpina przestrzeń V, to w myśl lematu o wymianie zawiera pewną jej bazę B. Wówczas $\#B = \dim V = k = \#A$, skąd $A = B$, tj. A jest bazą.

Podobnie, gdy zbiór A jest liniowo niezależny, to można go rozszerzyć do bazy C przestrzeni V, i znów $A = C$; tak więc $b) \Rightarrow c)$. Implikacje odwrotne są oczywiste. □

Twierdzenie 2. *Niech V będzie przestrzenią wektorową wymiaru k. Wówczas:*
a) Dla każdego liniowo niezależnego zbioru $S \subset V$ zachodzi $\#S \leq k$.
b) Dla każdego zbioru $B \subset V$, generującego V, zachodzi $\#B \geq k$.

Dowód. Ustalmy skończoną bazę C przestrzeni V.

a) Gdy zbiór S jest liniowo niezależny, to dla każdego zbioru skończonego $A \subset S$ mamy $\#A \leq \#C = k$ na podstawie lematu o wymianie, zastosowanego przy $B := C$. Zatem i $\#S \leq k$.

b) Gdy zbiór B generuje V, to z lematu o wymianie, zastosowanego przy $A := C$, otrzymujemy $\#B \geq \#C = k$. □

Definicja. Zbiór A nazwiemy **maksymalnym** w rodzinie zbiorów $\mathcal{A}$, jeśli nie jest zawarty w żadnym innym zbiorze z tej rodziny; nazwiemy go **minimalnym** w $\mathcal{A}$, jeśli nie zawiera żadnego innego zbioru z $\mathcal{A}$.

Lemat 1. *Niech zbiór C rozpina przestrzeń, a A będzie maksymalnym wśród jego liniowo niezależnych podzbiorów. Jeśli zbiór A jest skończony, to jest bazą przestrzeni.*

Dowód. Weźmy dowolny wektor $\mathbf{v} \in C \setminus A$. Wobec maksymalności zbioru A, zbiór $A \cup \{\mathbf{v}\}$ jest liniowo zależny, skąd $\mathbf{v} \in \operatorname{lin}(A)$. Zatem $C \subset \operatorname{lin}(A)$ i wobec tego zbiór A, w ślad za C, rozpina przestrzeń. Jest on więc jej bazą, bo jest liniowo niezależny.

Twierdzenie 3. *Niech V_0 będzie podprzestrzenią skończenie wymiarowej przestrzeni V. Wówczas $\dim(V_0) \leq \dim(V)$; zaś jeśli $V_0 \neq V$, to $\dim(V_0) < \dim(V)$.*

Dowód. Każdy liniowo niezależny zbiór $A \subset V$ jest mocy $\leq \dim V$, na podstawie twierdzenia 2. Niech A_0 będzie najliczniejszym (a więc i maksymalnym) takim zbiorem. Z lematu wynika, że A_0 jest bazą podprzestrzeni V_0. Stąd $\dim V_0 \leq \dim V$, a gdy $\#A_0 = \dim V$, to A_0 rozpina przestrzeń V (na mocy twierdzenia 1) i $V_0 = \operatorname{lin}(A_0) = V$.

Twierdzenie 4. *Przy założeniach twierdzenia 3, przekształcenie $L_0 \in \mathcal{L}(V_0, W)$, gdzie W to przestrzeń liniowa, można przedłużyć do $L \in \mathcal{L}(V, W)$.*

Dowód. Dowolną bazę $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^k$ przestrzeni V_0 rozszerzmy do bazy $(\mathbf{v}_i)_{i=1}^l$ przestrzeni V. (Tu, $l \geq k$.) Przedłużenie L przekształcenia L_0 wyznaczyć można warunkami $L(\mathbf{v}_i) = L_0(\mathbf{v}_i)$ dla $i \leq k$ oraz $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ dla $i > k$.

Zadania uzupełniające.

1. Niech V_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni V i niech $\mathbf{v} \in V \setminus V_0$. Dowieść, że jeśli $\dim(V) < \infty$, to istnieje funkcja $\ell \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$, zerująca się na V_0, lecz $\ell(\mathbf{v}) \neq 0$.

2. * Niech $\ell, \ell_1, ..., \ell_k \in U^* := \mathcal{L}(U, \mathbb{F})$. Dowieść, że:

a) Jeśli $\ker(\ell) \supset \bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i)$, to $\ell = \sum_{i=1}^k c_i \ell_i$ dla pewnych skalarów $c_1, ..., c_k$. (Wskazówka: zad. uz. 2 z §1.3, przy $L = \ell$ i $V = \mathbb{F}^k$, wraz z tw. 4.)

b) $(\ell_1, ..., \ell_k)$ jest bazą przestrzeni $U^* \Leftrightarrow (k = \dim(U)$ i $\bigcap_{i=1}^k \ker(\ell_i) = \{\mathbf{0}\})$.

4. * Bazy Hamela (zadania uzupełniające, wykorzystujące pewnik wyboru).

1. Dla podzbioru A przestrzeni wektorowej V udowodnić równoważność warunków:

a) A jest minimalnym zbiorem generującym V;

b) A jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem V;

c) zbiór A jest liniowo niezależny i rozpina V;

d) dla każdego wektora $\mathbf{v} \in V$ istnieje dokładnie jeden układ skalarów $(c_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}))_{\mathbf{a} \in A}$ taki, że zbiór $\{\mathbf{a} \in A : c_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) \neq 0\}$ jest skończony i $\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{a} \in A} c_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})\mathbf{a}$.

Zbiór A nazwiemy **bazą Hamela** przestrzeni V, jeśli spełniony jest pewien (=każdy) z powyższych warunków. Korzystając z tzw. indukcji pozaskończonej lub lematu Kuratowskiego-Zorna nietrudno wykazać, że każdy zbiór generujący zawiera bazę Hamela, a każdy liniowo niezależny można do takiej bazy rozszerzyć. (Patrz [BB].)

2. Niech zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych będzie rozpatrywany jako przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych. (Patrz przykład 7 z §1.2.) Ustalmy bazę Hamela A tej przestrzeni wektorowej i wektor (=liczbę) $a \in A$, i oznaczmy przez ψ funkcję $\mathbb{R} \ni v \mapsto c_a(v) \in \mathbb{Q}$. Dowieść, że:

a) ψ jest funcją addytywną, tzn. $\psi(v + w) = \psi(v) + \psi(w)$ dla $v, w \in \mathbb{R}$;

b) ψ jest funkcją nieciągłą w każdym punkcie $v \in \mathbb{R}$.

3. i) Udowodnić lemat o wymianie bez założenia skończoności zbioru B (dowodzimy, że $A \cup B_0$ jest bazą Hamela). (Wskazówka: rozważyć rodzinę zbiorów $C \subset B$ takich, że zbiór $A \cup C$ jest liniowo niezależny i dowieść, że za B_0 można obrać dowolny maksymalny zbiór w tej rodzinie. Skorzystać z lematu Kuratowskiego-Zorna.)

ii) Korzystając z lematu o wymianie dowieść twierdzenia z §2.3 dla baz Hamela.

5. Badanie podprzestrzeni przestrzeni współrzędnych.

Pokażemy teraz, jak ostatnie wyniki odnoszą się do danej podprzestrzeni V przestrzeni $\mathbb{F}^n$. Jest często zadana w jednej z następujących postaci:

a) V jest powłoką liniową znanych nam wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s \in \mathbb{F}^n$. (Mówimy też wtedy: V jest **przestrzenią wektorów** $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s$.) Przedstawienie to nazywamy **parametrycznym**, bo wektory $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^s c_i \mathbf{v}_i$ uzależnione są od parametrów $c_i \in \mathbb{F}$.

b) V jest zbiorem rozwiązań układu równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_l$ w $\mathbb{F}^n$. To przedstawienie nazywane jest **uwikłanym**; mówimy też, że podprzestrzeń V jest **zadana układem równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$**. Odnotujmy, że V jest wtedy jądrem przekształcenia $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^l$.

Niekiedy wygodnie jest od jednej z tych postaci przejść do drugiej.

Uwaga 1. Sposób znalezienia bazy podprzestrzeni zadanej w sposób uwikłany podany został w przykładzie 3 z §2.1. Umiemy więc ją przedstawić jako przestrzeń wektorów otrzymanej bazy, by od przedstawienia uwikłanego przejść do parametrycznego. □

Uwaga 2. By przestrzeń wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s \in \mathbb{F}^n$ przedstawić w postaci uwikłanej zauważamy, że jest ona zbiorem tych $\mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$, dla których niesprzeczny jest układ równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ o macierzy $\mathbf{A}$, której $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s$ są kolumnami. Sposób znalezienia układu równań opisującego ten zbiór przedstawiony jest w II.5.4. □

Uwaga 3. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{F}^n$.

a) By znaleźć bazę podprzestrzeni $V_1 \cap V_2$, postarajmy się tak V_1, jak i V_2 przedstawić jako zbiór rozwiązań pewnego układu liniowych równań jednorodnych. Łącznie wzięte, równania obu tych układów opisują rozważaną podprzestrzeń $V_1 \cap V_2$. Bazę jej znajdziemy więc wykorzystując uwagę 1. (Inne sposoby konstrukcji bazy przecięcia podprzestrzeni znaleźć można w zadaniu uzupełniającym 3 do §6.1 oraz w „Algebrze dla fizyków" Pawła Urbańskiego, str. 126.)

b) By znaleźć bazę podprzestrzeni $V_1 + V_2$ (patrz zadanie 1 w p.1) przedstawmy V_i w postaci parametrycznej: $V_i = \text{lin}(A_i)$ $(i = 1, 2)$. Wówczas $V_1 + V_2 = \text{lin}(A_1 \cup A_2)$, co pozwala posłużyć się uwagą 2, a następnie 1, lub odwołać do poniższej uwagi 5. □

Zapytajmy też, jak dla podprzestrzeni $V_1, V_2 \subset \mathbb{F}^n$ zbadać, czy $V_1 \subset V_2$.

Uwaga 4. Gdy $V_1 = \text{lin}(A)$, gdzie zbiór $A \subset \mathbb{F}^n$ jest skończony, a V_2 zadano w postaci uwikłanej, to bez trudu możemy rozstrzygnąć, czy wektory $\mathbf{v} \in A$ są rozwiązaniami układu równań opisującego V_2, i ustalić w ten sposób, czy ma miejsce inkluzja $V_1 \subset V_2$. (Patrz własność iii) z twierdzenia 1 w p.1.) Można też, korzystając z uwag 1 i 2, zamienić role V_1 i V_2 i sprawdzić, czy $V_2 \subset V_1$ – a tym samym, czy $V_1 = V_2$. □

Umiemy więc badać równość podprzestrzeni w $\mathbb{F}^n$. Jeszcze łatwiej to robić w oparciu o twierdzenie Hermite'a z zadania uzupełniającego 2.

Dalej potrzebny będzie lemat i zadanie.

Lemat 1. *Niech macierze* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,k}$ *będą wierszowo równoważne. Wówczas:*

a) Macierz $\mathbf{A}$ *ma tę samą przestrzeń wierszy, co* $\mathbf{B}$*.*

b) Jeśli kolumny macierzy $\mathbf{A}$ *o numerach* $k_1, ..., k_s$ *są liniowo niezależne, to jest tak i dla macierzy* $\mathbf{B}$*.*

Dowód. a) Wystarczy rozpatrzeć przypadek, gdy $\mathbf{B}$ powstaje z $\mathbf{A}$ w wyniku wykonania jednej operacji $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Wtedy każdy wiersz $\mathbf{B}$ jest kombinacją liniową wierszy $\mathbf{A}$, skąd przestrzeń wierszy $\mathbf{B}$ jest podzbiorem przestrzeni wierszy $\mathbf{A}$. Ponieważ istnieje i operacja odwrotna $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$, więc prawdziwa jest też inkluzja przeciwna.

b) Można założyć, że rozważamy wszystkie kolumny obu macierzy (inaczej wykreślamy pozostałe). Wtedy układy równań $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ są równoważne, i gdy pierwszy ma tylko rozwiązanie zerowe, to drugi też.

Zadanie 1. a) Niezerowe wiersze macierzy schodkowej są liniowo niezależne.

b) Układ kolumn prowadzących takiej macierzy jest bazą jej przestrzeni kolumn, która to przestrzeń jest równa $\{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^l : v_{r+1} = ... = v_k = 0\}$, dla r oznaczającego liczbę niezerowych wierszy.

Uwaga 5. Niech teraz V będzie podprzestrzenią, zadaną jako przestrzeń wektorów $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_q$. By rozszerzyć do jej bazy pewien liniowo niezależny zbiór $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1}^p \subset V$, utworzyć warto macierz $\mathbf{A}$ o kolumnach $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_q$, i wierszowo jej równoważną macierz schodkową $\mathbf{B}$. Twierdzimy, że jeśli kolumny prowadzące macierzy $\mathbf{B}$ mają numery $k_1, .., k_r$, to kolumny $\mathbf{A}$ o tych numerach tworzą szukaną bazę. Istotnie:

a) Zbiór tych kolumn zawiera $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p\}$. Bo skoro pierwszych p kolumn macierzy $\mathbf{B}$ jest liniowo niezależnych, w ślad za macierzą $\mathbf{A}$, to wyznaczona przez nie podmacierz $\mathbf{B}_0$ ma wymiar przestrzeni kolumn równy p. Z zadania 1b) wynika więc, że wszystkie te kolumny są prowadzące w $\mathbf{B}_0$, a zatem i w $\mathbf{B}$.

b) Zbiór ten jest bazą przestrzeni kolumn, bo jest maksymalnym liniowo niezależnym podzbiorem zbioru kolumn. (Wynika to z lematu 1b) i zadania 1b).) □

Zadanie 2. Gdy badamy obraz podprzestrzeni przy przekształceniu liniowym, wygodnie jest znać jej przedstawienie parametryczne; zaś gdy przeciwobraz, lepsze jest przedstawienie uwikłane. Uzasadnić to.

Zadania uzupełniające.

1. * a) Dowieść, że gdy macierze zredukowane mają tę samą przestrzeń wierszy, to ich podmacierze wyznaczone przez (wszystkie) niezerowe wiersze są równe.

b) Wywnioskować, że każda macierz jednoznacznie wyznacza swą postać zredukowaną, i że dwie macierze wtedy i tylko wtedy mają tę samą przestrzeń wierszy, gdy ich postaci zredukowane mają te same wiersze niezerowe. (Są to wyniki Hermite'a.)

Zadania ze zbioru Kostrykina: 14 i 15 w §I.2.1 oraz 11,14,15,16 w §II.1.2.

§ 5. Rząd (zbioru wektorów, przekształcenia, macierzy).

1. Twierdzenie Sylvestera o defekcie i dogodna baza dziedziny przekształcenia.

Twierdzenie 1. *Jeśli $L : V \to W$ jest odwzorowaniem liniowym i jego obraz $L(V)$ oznaczymy przez* $\mathrm{im}(L)$*, to*

$$(*) \qquad \dim(V) = \dim(\mathrm{im}(L)) + \dim(\ker(L)),$$

(Oznacza to: gdy któraś ze stron w $(*)$ jest liczbą skończoną, to druga jest jej równa.)

Definicja. Liczby $\dim(\mathrm{im}(L))$ i $\dim(\ker(L))$ nazywamy, odpowiednio, **rzędem** (ang. „rank”) i **defektem** przekształcenia L i oznaczamy $\mathrm{rk}(L)$ i $\mathrm{def}(L)$, odpowiednio.

Tytułowa nazwa twierdzenia bierze się stąd, że wyznacza ono defekt przez $\mathrm{rk}(L)$ i wymiar dziedziny. W dowodzie wykorzystamy ważny dla nas

Lemat 1. *Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$, niech $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)$ będzie bazą przestrzeni* $\ker(L)$*, a $(\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q)$ bazą przestrzeni $L(V)$. Wybierzmy wektory $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_q \in V$ tak, by $\mathbf{w}_i = L(\mathbf{u}_i)$ dla $i = 1, ..., q$. Wówczas $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_q, \mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_p)$ jest bazą przestrzeni V.*

Dowód. Należy dowieść, że dla każdego $\mathbf{v} \in V$ istnieje dokładnie jeden ciąg skalarów $(c_1, ..., c_q, d_1, ..., d_p)$ taki, że $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^q c_i\mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^p d_i\mathbf{v}_i$. W tym celu ustalmy wektor $\mathbf{v}$. Ponieważ $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p \in \ker(L)$, więc z liniowości L wynika, że gdy $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^q x_i\mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^p y_i\mathbf{v}_i$, to $L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^q x_iL(\mathbf{u}_i)$ Ostatnie równanie, z niewiadomymi $x_1, ..., x_q$, ma jedyne rozwiązanie, bo $L(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i$ i $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^q$ jest bazą w $L(V)$. Oznaczmy to rozwiązanie przez $(c_1, ..., c_q)$; wówczas $L(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^q c_i\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$. Równanie $\sum_{i=1}^p y_i\mathbf{v}_i = \mathbf{v} - \sum_{i=1}^q c_i\mathbf{u}_i$ ma więc też jedyne rozwiązanie, bo $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_q$ jest bazą w $\ker(L)$. Oznaczając to rozwiązanie przez $(d_1, ..., d_p)$ stwierdzamy, że $(c_1, ..., c_q, d_1, ..., d_p)$ jest jedynym ciągiem o żądanej własności. $\square$

Dowód twierdzenia. Z lematu wynika, że gdy przestrzenie $\ker(L)$ i $L(V)$ mają bazy mocy p i q, odpowiednio, to V ma bazę mocy $p+q$, skąd $\dim V = p+q = \dim(\ker(L)) + \dim(L(V))$. Ponadto, gdy $\dim(V) < \infty$, to $\dim L(V) < \infty$ (bo obraz dowolnej bazy przestrzeni V jest zbiorem skończonym, generującym $L(V)$) oraz $\dim(\ker(L)) < \infty$ (patrz twierdzenie 3 z §4.3). Stąd wynika teza. $\square$

Przykład 1. Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi i niech $U := V \times W$ będzie ich iloczynem kartezjańskim. (Patrz przykład 1 w §1.3.) Ponieważ rzutowanie $V \times W \to V$ jest przekształceniem liniowym, więc z lematu wynika, że dla dowolnych baz $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ przestrzeni V i $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ przestrzeni W, ciąg $(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}_W), ..., (\mathbf{v}_p, \mathbf{0}_W), (\mathbf{0}_V, \mathbf{w}_1), ..., (\mathbf{0}_V, \mathbf{w}$ jest bazą przestrzeni $V \times W$. (Można to też uzasadnić bezpośrednio.) Zatem $\dim(V \times W) = \dim(V) + \dim(W)$, a przez indukcję uzyskujemy wzór $\dim(\prod_{i=1}^k V_i) = \sum_i \dim V_i$, dla dowolnych przestrzeni $V_1, ..., V_k$.

Wniosek 1. *Niech* $L \in \mathcal{L}(V, W)$. *Jeśli* $\dim(V) = \dim(W) < \infty$, *to następujące warunki są równoważne:*

a) L *jest izomorfizmem,*

b) L *jest przekształceniem różnowartościowym,*

c) L *jest przekształceniem „na".*

Dowód. Niech $k = \dim(V) = \dim(W)$. Z równości (*) wynika, że $\ker(L) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(L(V)) = k$, tak więc każdy z warunków b), c) implikuje drugi. $\square$

Wniosek 2. *Niech* $L : V \to W$ *będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:*

a) $\dim L(V) \leq \dim V$, *skąd jeśli* $\dim V < \dim W$, *to* L *nie jest „na";*

b) jeśli $\dim V > \dim W$, *to* $\ker(L) \neq \{\mathbf{0}\}$ *i wobec tego* L *nie jest różnowartościowe;*

c) Jeśli $\dim W = 1$, *to albo* $\ker(L) = V$ *i* $L = 0$, *albo* $\dim(\ker(L)) = \dim V - 1$. $\boxminus$

Gdy $V = \mathbb{F}^k, W = \mathbb{F}^l$ i $L(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ dla $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k$, wnioski te odpowiadają rezultatom dotyczącym układów jednorodnych równań liniowych, z macierzą $\mathbf{A}$. I tak, wniosek 1 jest wtedy powtórzeniem twierdzenia 1 z §II.5.1, a część b) wniosku 2 uogólnia stwierdzenie 1a) z §1.3 (którego związek z wynikami rozdziału II był już omówiony).

Wniosek 3. r*–wymiarowa podprzestrzeń* k*–wymiarowej przestrzeni wektorowej* V *jest jądrem pewnego przekształcenia* $K \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F}^{k-r})$*; nie jest ona jednak jądrem żadnego przekształcenia* $L \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F}^l)$ *dla* $l < k - r$.

Dowód. Rozszerzmy bazę $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_r$ rozważanej podprzestrzeni do bazy $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ przestrzeni V. Przekształcenie K definiujemy tak, by $K(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ dla $i = 1, ..., r$ oraz $K(\mathbf{v}_i) = \mathbf{e}_{i-r}$ gdy $r < i \leq k$. (Sprawdzenie, że $\ker(L) = V_0$, jest pozostawione jako ćwiczenie.) Końcowa część tezy wynika z twierdzenia 1, bo dla $L \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F}^l)$ zachodzi $\dim(\ker(L)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{im}(L)) \geq \dim(V) - l$. $\boxminus$

Ponieważ jądrem przekształcenia $L = L_{\mathbf{A}} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^k, \mathbb{F}^l)$ jest zbiór rozwiązań równania $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, więc otrzymujemy stąd

Wniosek 4. r*–wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni* $\mathbb{F}^k$ *jest zbiorem rozwiązań pewnego układu* $k - r$ *równań liniowych jednorodnych, lecz nie jest zbiorem rozwiązań żadnego układu* l *takich równań dla* $l < k - r$. $\square$

Zadania uzupełniające.

1. a) Przy oznaczeniach lematu 1 i rozszerzmy układ $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^q$ do bazy $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^r$ przestrzeni W. Znaleźć macierz L w bazach $(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_q, \mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p)$ i $(\mathbf{w}_i)_{i=1}^r$.

b) Rozwiązać zadanie 4 z §II.4.3, stosując a) do przekształcenia $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$.

2. Udowodnić następujące „odwrócenie" tezy lematu 1: jeśli $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_q$ jest bazą przestrzeni V, przy czym $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_p$ jest bazą jądra przekształcenia liniowego L :

$V \to W$, to $L(\mathbf{u}_1), ..., L(\mathbf{u}_q)$ jest bazą w $L(V)$. (Wskazówka: dowód jest bardzo krótki, gdy skorzystać z twierdzenia 1 w §4.3 i twierdzenia 1.)

3. Dla jakich n istnieje przekształcenie $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takie, że $\mathrm{im}(L) = \ker(L)$?

4. * Zadajmy na wielomiany $f \in \mathbb{R}[x]$ warunki postaci $D^0 f(a_i) = b_{i,0}, Df(a_i) = b_{i,1}, ..., D^{m_i} f(a_i) = b_{i,m_i}$, dla skończenie wielu liczb $a_1, ..., a_s \in \mathbb{R}$ $(a_i \neq a_j), m_1, \ldots m_s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $b_{i,j} \in \mathbb{R}$. ($D^n f$ oznacza n–tą pochodną f i $D^0 f = f$.) Dowieść, że jeśli warunków tych jest łącznie k, to spełnia je dokładnie jeden wielomian stopnia $\leq k-1$. (Wskazówka: rozważyć przekształcenie $L : \mathbb{R}_{k-1}[x] \to \mathbb{R}^k$ zadane przez $L(f) = (f(a_1), Df(a_1), ..., D^{m_1} f(a_1), ..., f(a_s), Df(a_s), ..., D^{m_s} f(a_s))$.)

2. Rząd zbioru wektorów i rząd macierzy.

Definicja. Niech B będzie podzbiorem skończenie-wymiarowej przestrzeni wektorowej V. Liczbę $\dim(\mathrm{lin}(B))$ nazywamy **rzędem** zbioru B i oznaczamy przez $\mathrm{rk}(B)$ (od angielskiego „rank"). Jest ona równa mocy najliczniejszego liniowo niezależnego podzbioru zbioru B; patrz lemat 1 z §4.3.

Definicja. **Rzędem $l \times k$–macierzy $\mathbf{A}$**, oznaczanym przez $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$, nazywamy rząd zbioru jej wierszy. Tak więc $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$ jest wymiarem przestrzeni wierszy macierzy $\mathbf{A}$, a też jest największą z liczb $s \geq 0$, dla których $\mathbf{A}$ ma s liniowo niezależnych wierszy.

Zaskakujące jest, że gdy w definicji powyższej zamiast wierszy użyć kolumn macierzy $\mathbf{A}$, to otrzyma się tę samą liczbę. Dowodzi tego

Twierdzenie 1. *Dla macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}(\mathbb{F})$ i liczby s równoważne są warunki:*
a) pewnych s wierszy $\mathbf{A}$ jest liniowo niezależnych (w przestrzeni $\mathbb{F}^k$);
b) pewnych s kolumn $\mathbf{A}$ jest liniowo niezależnych (w przestrzeni $\mathbb{F}^l$);
c) istnieje nieosobliwa podmacierz rozmiaru $s \times s$ macierzy $\mathbf{A}$.

Wniosek 1. *Dla każdej macierzy $\mathbf{A}$ ma miejsce równość $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A}^t)$. Równoważnie: przestrzeń wierszy macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ (będąca podprzestrzenią w $\mathbb{F}^k$) i przestrzeń kolumn tej macierzy (będąca podprzestrzenią w $\mathbb{F}^l$) są tego samego wymiaru.* □

Dowód twierdzenia. a)⇒c). Korzystać będziemy z lematu i zadania z §4.5. Niech s wierszy macierzy $\mathbf{A}$ będzie liniowo niezależnych; możemy złożyć, że są to wszystkie wiersze (inaczej wykreślimy pozostałe). Niech $\mathbf{B}$ będzie macierzą schodkową, wierszowo równoważną $\mathbf{A}$. Przestrzeń jej wierszy jest wymiaru s, bo tak jest dla macierzy $\mathbf{A}$. A że $\mathbf{B}$ ma tylko s wierszy, to są one liniowo niezależne i wobec tego niezerowe. $\mathbf{B}$ ma więc s kolumn prowadzących; niech mają one numery $k_1, ..., k_s$. Kolumny macierzy $\mathbf{A}$ o tych numerach są liniowo niezależne na podstawie części b) zadania i lematu. Wyznaczona przez nie podmacierz kwadratowa jest więc nieosobliwa.

c)⇒b). Kolumny nieosobliwej podmacierzy są liniowo niezależne, skąd odpowiadające im kolumny macierzy $\mathbf{A}$ też są liniowo niezależne.

b)⇒a). Dowiedliśmy więc, że a)⇒b), i pozostaje zastosować to do macierzy $\mathbf{A}^t$. □

Powstaje pytanie, jak wyznaczyć niesosobliwą $s \times s$ – podmacierz macierzy $\mathbf{A}$, dla zadanej liczby $s \leq \mathrm{rk}(\mathbf{A})$. Sprowadzenie macierzy $\mathbf{A}$ do postaci schodkowej pozwala wyznaczyć $r = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$ jej liniowo niezależnych kolumn. Wykreślając pozostałe i transponując powstałą macierz, możemy następnie tak samo wyznaczyć numery r wierszy macierzy $\mathbf{A}$, takich, że klatka wyznaczona przez te wiersze (i poprzednie kolumny) jest nieosobliwa. Tak samo można postąpić przy $s < r$.

Uwaga 1. Zdefiniowany przez nas rząd nazywany jest **rzędem wierszowym** macierzy $\mathbf{A}$. Natomiast największa liczba s, dla której zachodzi warunek b) (odp. c)) twierdzenia, nazywana jest jej **rzędem kolumnowym** (odp. **rzędem wyznacznikowym**, powód wskaże twierdzenie 2 w §IV.1.1). Tak więc te trzy rzędy są zawsze równe.

Uwaga 2. Gdy $\mathbf{B}$ otrzymano z $\mathbf{A}$ przez wykonanie ciągu operacji elementarnych, wierszowych i kolumnowych, to $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}(\mathbf{B})$. Wynika to z lematu 1 w §4.5.

<u>Zadania uzupełniające.</u> Dowieść, że:

1. Sposób z uwagi 2 w §4.5 daje minimalną liczbę równań liniowych jednorodnych (w układach, opisujących daną podprzestrzeń $V = \mathrm{lin}(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_s) \subset \mathbb{F}^k$).

2. a) $\mathrm{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{B}]) \leq \mathrm{rk}(\mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{B})$.
   b) $\mathrm{rk}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{rk}(\mathbf{A}) + \mathrm{rk}(\mathbf{B})$ gdy suma $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ istnieje. (Użyć a).)

3. a) Gdy T jest zbiorem skończonym, a funkcje $f_1, ..., f_n : T \to \mathbb{F}$ są liniowo niezależne w przestrzeni $\mathbb{F}^T$, to istnieje n–elementowy zbiór $T_0 \subset T$ taki, że obcięcia tych funkcji do T_0 są liniowo niezależne.
   b)* Tak samo jest dla nieskończonego zbioru T.

4. Gdy przekształcenie $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest „na", to wiersze macierzy $\mathbf{A}$ są liniowo niezależne, i odwrotnie.

5. Niech $\mathbb{G}$ będzie podciałem ciała $\mathbb{F}$ i niech $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{G})$. Dowieść, że $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$ nie zależy od tego, czy $\mathbf{A}$ rozpatrujemy jako macierz nad $\mathbb{F}$, czy jako macierz nad $\mathbb{G}$.

6. Każda podmacierz danej macierzy $\mathbf{A}$, wyznaczona przez jej $r = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$ liniowo niezależnych wierszy i r liniowo niezależnych kolumn, jest nieosobliwa.

7. Gdy pewna $s \times s$–klatka macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_k$ jest zerowa, to $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) \leq 2\min(k-s, s)$.

8. Gdy $\mathbf{A}_0$ jest nieosobliwą $s \times s$–podmacierzą macierzy $\mathbf{A}$ i $s < \mathrm{rk}(\mathbf{A})$, to istnieje nieosobliwa $(s+1) \times (s+1)$–podmacierz macierzy $\mathbf{A}$, obejmująca $\mathbf{A}_0$ (tzn. taka, że $\mathbf{A}_0$ jest jej podmacierzą).

9. * Oznaczmy przez $\ell_i \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ i-tą składową przekształcenia $L \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F}^k)$. Dowieść, że jeśli $\dim V < \infty$, to $\mathrm{def}(L) = \mathrm{rk}(\ell_1, ..., \ell_k)$. (Wskazówka: zadanie uzupełniające z §4.3 i wniosek 2c) w p.2.)

Zadania ze zbioru Kostrykina: od 12 do 15 w §I.2.1; 2b) w §II.1.3 i 1,2c),d),e),3,7–14 (bez 9) w §I.2.2. (W zad. 8 „minor $\neq 0$" czytać jako „podmacierz nieosobliwa".)

3. Oszacowanie rzędu złożenia.

Przypomnijmy, że dla przekształcenia liniowego L pomiędzy skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi, liczbę $\dim(\mathrm{im}(L))$ oznaczyliśmy w p.1 przez $\mathrm{rk}(L)$ i nazwaliśmy **rzędem** tego przekształcenia. Gdy $L_{\mathbf{A}} : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^l$ jest przekształceniem wyznaczonym macierzą $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$, to $\mathrm{rk}(L_{\mathbf{A}}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$, bo obie strony są równe wymiarowi przestrzeni kolumn macierzy $\mathbf{A}$.

Twierdzenie 1. *Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i niech $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$ będą bazami przestrzeni V i W, odpowiednio. Wówczas* $\mathrm{rk}(L) = \mathrm{rk}([L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}})$.

Dowód. Oznaczmy przez $S : V \to \mathbb{F}^k$ i $T : W \to \mathbb{F}^l$ mapy wyznaczone przez te bazy, i niech $\mathbf{A} := [L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}$. Ponieważ $T \circ L = L_{\mathbf{A}} \circ S$, więc izomorfizm T przeprowadza przestrzeń $\mathrm{im}(L)$ na $\mathrm{im}(L_{\mathbf{A}})$. Przestrzenie te są więc równego wymiaru. □

Twierdzenie 2. *Dla przekształceń liniowych L_1, L_2 i macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ zachodzi*

$$rk(L_2 \circ L_1) \leq \min(\mathrm{rk}(L_1), \mathrm{rk}(L_2)), \qquad \mathrm{rk}(\mathbf{AB}) \leq \min(\mathrm{rk}(\mathbf{A}), \mathrm{rk}(\mathbf{B}))$$

gdy tylko złożenie $L_2 \circ L_1$ (odp. iloczyn $\mathbf{AB}$) ma sens.

Dowód. Mamy $\mathrm{im}(L_2 \circ L_1) \subset \mathrm{im}(L_2)$, skąd $\mathrm{rk}(L_2 \circ L_1) \leq \mathrm{rk}(L_2)$. Ponadto, przyjmując $V := \mathrm{im}(L_1)$ zauważamy, że $\mathrm{im}(L_2 \circ L_1) = L_2(V)$, skąd $\mathrm{rk}(L_2 \circ L_1) = \dim(L_2(V)) \leq \dim(V) = \mathrm{rk}(L_1)$ (nierówność wynika np. z wniosku 2a) w p.1). To dowodzi pierwszej nierówności, a z niej przy $L_2 := L_{\mathbf{A}}, L_1 := L_{\mathbf{B}}$ wynika druga. □

Wniosek 1. *Niech $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ będą macierzami, których iloczyn $\mathbf{AB}$ ma sens. Jeśli $\mathbf{A}$ jest (kwadratową) macierzą nieosobliwą, to* $\mathrm{rk}(\mathbf{AB}) = \mathrm{rk}(\mathbf{B})$, *a jeśli $\mathbf{B}$ jest taką macierzą, to* $\mathrm{rk}(\mathbf{AB}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$.

Dowód. Gdy macierz $\mathbf{A}$ jest nieosobliwa, to $\mathrm{rk}(\mathbf{AB}) \leq \mathrm{rk}(\mathbf{B})$ i $\mathrm{rk}(\mathbf{B}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})) \leq \mathrm{rk}(\mathbf{AB})$, skąd $\mathrm{rk}(\mathbf{AB}) = \mathrm{rk}(\mathbf{B})$. Drugiej części tezy dowodzimy analogicznie. □

Poniższy materiał jest uzupełniający.

Uwaga 1. * Dla przekształcenia $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i podprzestrzeni W_0 przestrzeni W ma miejsce nierówność (definicja liczby $\mathrm{def}(L)$ jest w p.1):

$$\dim(L^{-1}(W_0)) \leq \dim(W_0) + \mathrm{def}(L)$$

Istotnie, przy $V_0 := L^{-1}(W_0)$ zastosujmy twierdzenie z p.1 do indukowanego przez L przekształcenia $V_0 \to W_0$ (mającego to samo jądro, co L). Otrzymamy $\dim(V_0) = \dim(L(V_0)) + \operatorname{def}(L) \leq \dim(W_0) + \operatorname{def}(L)$.

Twierdzenie 3. * *Gdy istnieje złożenie $L_2 \circ L_1$ przekształceń liniowych L_1, L_2, to $\operatorname{def}(L_2 \circ L_1) \leq \operatorname{def}(L_1) + \operatorname{def}(L_2)$.*

Dowód. Niech $V := \ker(L_2 \circ L_1)$ i $W := \ker(L_1)$. Ponieważ $V = L_2^{-1}(W)$, więc $\operatorname{def}(L_2 \circ L_1) = \dim(V) \leq \dim(W) + \operatorname{def}(L_2) = \operatorname{def}(L_1) + \operatorname{def}(L_2)$.

Zadania uzupełniające.

1. Wykorzystując twierdzenie 3 dowieść, że jeśli $\mathbf{A}$ ma q kolumn, a $\mathbf{B}$ ma q wierszy, to $\operatorname{rk}(\mathbf{AB}) \geq \operatorname{rk}(\mathbf{A}) + \operatorname{rk}(\mathbf{B}) - q$.

2. Dla macierzy $\mathbf{A}$ przyjmijmy $\operatorname{def}(\mathbf{A}) := \operatorname{def}(L_{\mathbf{A}})$. Dowieść, że gdy iloczyn $\mathbf{AB}$ istnieje, to $\operatorname{def}(\mathbf{AB}) \geq \operatorname{def}(\mathbf{B})$, a też $\operatorname{def}(\mathbf{AB}) \geq \operatorname{def}(\mathbf{A})$ gdy macierz $\mathbf{B}$ jest kwadratowa. (Nierówności z ostatnich dwóch twierdzeń i zadań to **nierówności Sylvestera**.)

3. Niech $L_i \in \mathcal{L}(V_i, V_{i+1})$ dla $i = 0, 1, 2$. Dowieść, że
   a) $\operatorname{rk}(L_1) - \operatorname{rk}(L_2 \circ L_1) = \operatorname{def}(L_2|\operatorname{im}(L_1))$;
   b) $\operatorname{rk}(L_1) - \operatorname{rk}(L_2 \circ L_1) \geq \operatorname{rk}(L_1 \circ L_0) - \operatorname{rk}(L_2 \circ L_1 \circ L_0)$.
   c) Wyprowadzić nierówności Sylvestera z powyższej **nierówności Frobeniusa**.

4. a) Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\operatorname{rk}(L) = r$. Dowieść istnienia przekształceń $L_1 \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F}^r)$ i $L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^r, V)$ takich, że $L = L_2 \circ L_1$.
   b) Wywnioskować, że gdy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$ i $\operatorname{rk}(\mathbf{A}) = r$, to $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ dla pewnych macierzy $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{l,r}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{r,k}$ takich, że $\operatorname{rk}(\mathbf{B}) = \operatorname{rk}(\mathbf{C}) = r$.
   c) W szczególności, $\operatorname{rk}(\mathbf{A}) \leq 1 \Leftrightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{w}\mathbf{v}^t$ dla pewnych wektorów kolumnowych $\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k, \mathbf{w} \in \mathbb{F}^l)$.

5. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$, gdzie $k = \dim V, l = \dim W$. Dowieść, że jeśli $\operatorname{rk}(\mathbf{A}) = \operatorname{rk}(L)$, to $[L]_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \mathbf{A}$ dla pewnych baz $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ przestrzeni V i W, odpowiednio. (Wskazówka: zadanie uzupełniające 1b) w p.1.)

4. Rząd macierzy a układy równań.

(Wykład 15.) Rozpatrywać będziemy układ równań liniowych nad ciałem $\mathbb{F}$:

$$(U) \qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \text{gdzie } \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k},\ \mathbf{b} \in \mathbb{F}^l.$$

Twierdzenia udowodnione w rozdziale II dotyczące takiego układu możemy teraz uzupełnić dalszymi, których dowieść jest najłatwiej wykorzystując pojęcie wymiaru.

Twierdzenie 1 (L. Kroneckera i A. Capellego)**.** *Układ równań (U) wtedy i tylko wtedy jest niesprzeczny, gdy* $\mathrm{rk}(\mathbf{A}) = \mathrm{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$.

Dowód. Niech $V \subset \mathbb{F}^l$ i $W = \mathrm{lin}(V \cup \{\mathbf{b}\})$ będą przestrzeniami kolumn macierzy $\mathbf{A}$ i $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$, odpowiednio. Układ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{b} \in V$, lub równoważnie, gdy $W = V$; por. wnioski 1 i 2 w §4.1. Ponadto, $V \subset W$, skąd równość $W = V$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim(W) = \dim(V)$ (patrz twierdzenie 3 z §4.3). Stąd wynika teza, bo $\dim(W) = \mathrm{rk}([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$ i $\dim(V) = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$. $\square$

Twierdzenie 2. *Oznaczmy przez R rozwiązań układu (U), a przez R_0 zbiór rozwiązań układu* $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$.

a) Jeśli $R \neq \emptyset$, to dla każdego $\mathbf{w}_0 \in R$ mamy $R = R_0 + \mathbf{w}_0$, gdzie $R_0 + \mathbf{w}_0 := \{\mathbf{w} + \mathbf{w}_0 : \mathbf{w} \in R_0\}$;

b) R_0 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{F}^k$ i $\dim(R_0) = k - \mathrm{rk}(\mathbf{A})$

Dowód. a) Gdy $\mathbf{A}\mathbf{w}_0 = \mathbf{b}$, to dla każdego $\mathbf{w} \in \mathbb{F}^k$ mamy $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{w} + \mathbf{w}_0) = \mathbf{b}$.

b) Ponieważ $R_0 = \ker(L_{\mathbf{A}})$, więc R_0 jest podprzestrzenią i $\dim(R_0) = k - \dim(\mathrm{im}(L_A)) = k - \mathrm{rk}(\mathbf{A})$. $\square$

Uwaga 1. Część b) często bywa wypowiadana tak: *dla każdej macierzy $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{l,k}$, suma wymiarów jej przestrzeni kolumn i przestrzeni zerowej $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{F}^k : \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ jest równa k.*

Zadania uzupełniające.

1. Niech $K_i \in \mathcal{L}(V, W_i)$ i $\mathbf{w}_i \in W_i$ dla $i = 1, 2$. Zdefiniujmy $L_i \in \mathcal{L}(V \times \mathbb{F}, W_i)$ wzorem $L_i(\mathbf{v}, t) = K_i(\mathbf{v}) - t\mathbf{w}_i$. Dowieść, że jeśli $\emptyset \neq K_1^{-1}(\mathbf{w}_1) \subset K_2^{-1}(\mathbf{w}_2)$, to $\ker(L_1) \subset \ker(L_2)$.

2. Wywnioskować stąd i zadania uzupełniającego z §4.3, że jeśli każde rozwiązanie układu (U) jest rozwiązaniem innego układu (U'), to układ (U) jest sprzeczny lub każde równanie układu (U') jest kombinacją liniową równań układu (U).

Poniższy materiał można traktować jako uzupełniający. Dotyczy on znaczenia rzędu macierzy dla „rozwikływania" niewiadomych układu równań liniowych $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, tzn. wyrażania pewnych niewiadomych przez pozostałe, nazywane wolnymi. Zakładamy, że układ jest niesprzeczny i pierwszych $r = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$ kolumn macierzy $\mathbf{A}$ jest liniowo niezależnych. Jak wyjaśniono w §4.5, redukcja klatki $\mathbf{A}$ macierzy $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ doprowadzi do macierzy $[\mathbf{A}'|\mathbf{b}']$, w której prowadzących będzie pierwszych r kolumn (i tylko te) – co pozwala w każdym rozwiązaniu wyznaczyć niewiadome $x_1, ..., x_r$ przez pozostałe. Tak więc każdych $r = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$ niewiadomych, odpowiadających liniowo niezależnym kolumnom macierzy $\mathbf{A}$, traktować można jako **związane** – tzn. w każdym rozwiązaniu, ich wartości są wyznaczone przez (dowolne) wartości pozostałych **niewiadomych**

wolnych. Uwaga ta ma ważne uogólnienie na przypadek równań nieliniowych, gdzie prowadzi do tzw. „twierdzenia o funkcji uwikłanej”.

Zadania uzupełniające. (o podziale niewiadomych na wolne i związane).

3. Niech układ (U) będzie niesprzeczny. Dowieść, że w każdym podziale jego niewiadomych na wolne i związane:
   a) liczba niewiadomych związanych jest równa $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$;
   b) kolumny macierzy $\mathbf{A}$, odpowiadające niewiadomym związanym, są liniowo niezależne.

4. Niech układ (U) będzie niesprzeczny i niech $1 \leq k_1 < ... < k_s \leq k$. Dowieść równoważności warunków:
   a) istnieje podział niewiadomych na wolne i związane, w którym $x_{k_1}, ..., x_{k_s}$ są wśród wolnych;
   b) wykreślenie z macierzy $\mathbf{A}$ kolumn o numerach $k_1, ..., k_s$ nie zmienia jej rzędu.

§ 6. Sumy podprzestrzeni.

1. Wymiar sumy podprzestrzeni.

Definicja. **Sumą algebraiczną** podzbiorów $V_1, ..., V_k$ przestrzeni V nazywamy zbiór oznaczany $\sum_{i=1}^{k} V_i$ lub $V_1 + ... + V_k$ i zdefiniowany wzorem

$$\sum_{i=1}^{k} V_i := \{\mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k : \ \mathbf{v}_1 \in V_1, ..., \mathbf{v}_k \in V_k\}$$

Uwaga 1. Mówiąc o sumie podprzestrzeni V_i będziemy mieli zawsze na myśli sumę algebraiczną, bo mnogościowa na ogół nie jest podprzestrzenią. Suma algebraiczna zaś jest podprzestrzenią, równą $\mathrm{lin}(V_1 \cup ... \cup V_k)$. (Patrz zadanie uz. 1 w §1.2 i 1 w §4.1.)

Twierdzenie 1. *Gdy podprzestrzenie V_1, V_2 przestrzeni wektorowej są skończenie wymiarowe, to ma miejsce* **równość Grassmana***:*

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Dowód. Określmy przekształcenie $L : V_1 \times V_2 \to V$ wzorem $L(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. Wówczas $\ker(L) = \{(\mathbf{v}, -\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V_1 \cap V_2\}$, bo jeśli $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$, to $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \in V_1 \cap V_2$. Stąd $\mathbf{v} \mapsto (\mathbf{v}, -\mathbf{v})$ jest izomorfizmem $V_1 \cap V_2$ na $\ker(L)$ i wobec tego $\dim(\ker(L)) = \dim(V_1 \cap V_2)$. Ponieważ $\mathrm{im}(L) = V_1 + V_2$, więc teza wynika z twierdzenia 1 w §5.1 i równości $\dim(V_1 \times V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$ z §5.1. $\square$

Wniosek 1. *Niech* V_1 *i* V_2 *będą podprzestrzeniami* V*, takimi, że* $\dim(V_1)+\dim(V_2) > \dim(V)$*. Wówczas* $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$.

Dowód. Ponieważ $V_1 + V_2 \subset V$, więc $\dim(V_1 + V_2) \leq \dim(V)$. Stąd $\dim(V_1 \cap V_2) \geq \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V) > 0$. $\square$

Wniosek 2. *Gdy* $V_1, ..., V_s$ *są skończenie wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni wektorowej* V*, to:*
a) $\dim(V_1 + ... + V_s) \leq \dim(V_1) + ... + \dim(V_s)$*, oraz*
b) $\dim(V_1 \cap ... \cap V_s) \geq \dim(V_1) + ... + \dim(V_s) - (s-1)\dim(V)$.

Dowód. Dla $s = 2$ obie części wynikają z twierdzenia 1 i nierówności $0 \leq \dim(V_1 \cap V_2)$ i $\dim(V_1 + V_2) \leq \dim V$. Dla $s > 2$ stosujemy indukcję matematyczną. $\boxminus$

Zadania uzupełniające.

1. Gdy bazę A_0 podprzestrzeni $V_1 \cap V_2$ rozszerzymy do bazy A_i podprzestrzeni V_i, dla $i = 1, 2$, to $A_1 \cup A_2$ jest bazą podprzestrzeni $V_1 + V_2$. Uzasadnić to bezpośrednio i wyprowadzić stąd twierdzenie 1; dać też krótkie uzasadnienie oparte o twierdzenie 1.

2. Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}_4[x]$. Dowieść, że gdy $\dim V = 2$, to dla każdego $a \in \mathbb{R}$ istnieje w V wielomian $f \neq 0$ taki, że $f(a) = 0$, a gdy $\dim V = 3$, to dla każdych $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje w V wielomian $f \neq 0$ taki, że $f(a) = f(b) = 0$.

3. Wykorzystać część dowodu twierdzenia 1 do uzasadnienia następującej konstrukcji bazy podprzestrzeni $U \cap W$ przestrzeni $\mathbb{F}^l$, gdy znamy bazę $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p$ podprzestrzeni U i generatory $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ podprzestrzeni W: tworzymy macierz $\mathbf{A}$ o kolumnach $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_p, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_q$ znajdujemy bazę A przestrzeni zerowej tej macierzy i dla każdego wektora $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_p, a_{p+1}, ...$ A kładziemy $\mathbf{v_a} := a_1\mathbf{u}_1 + ... + a_p\mathbf{u}_k$. Szukaną bazą w $U \cap W$ jest $\{\mathbf{v_a} : \mathbf{a} \in A\}$. (Konstrukcja ta wymaga mniej rachunków, niż przedstawiona w uwadze 3 z §4.5.)

2. Niezależność podprzestrzeni i sumy proste.

Definicja. Powiemy, że **podprzestrzenie** $V_1, ..., V_k$ przestrzeni V **są niezależne** (co oznacza pewną własność układu $(V_1, ..., V_k)$), jeśli

$$(\mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k = \mathbf{0}) \Rightarrow (\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, ..., \mathbf{v}_k = \mathbf{0}) \text{ dla } \mathbf{v}_1 \in V_1, ..., \mathbf{v}_k \in V_k.$$

Sumę $V_0 = \sum_{i=1}^k V_i$ niezależnych podprzestrzeni nazywamy **prostą**. To, że suma jest prosta, zaznaczamy pisząc $\oplus$ w miejsce $+$ lub $\sum$. Tak więc $\oplus_{i=1}^k V_i$ oznacza ten sam zbiór, co $\sum_{i=1}^k V_i$, lecz użycie $\oplus$ przekazuje informację, że podprzestrzenie $V_1, ..., V_k$ są niezależne. Odnotujmy, że wektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ są liniowo niezależne, gdy są niezerowe i podprzestrzenie $\mathbb{F}\mathbf{v}_1, ..., \mathbb{F}\mathbf{v}_k$ są niezależne. Znaczenie sum prostych ujmuje następujące

Zadanie 1. Jeśli $V_0 = \oplus_{i=1}^k V_i$, to dla każdego $\mathbf{v} \in V_0$ istnieje jedyny ciąg wektorów $\mathbf{v}_1 \in V_1, ..., \mathbf{v}_k \in V_k$ taki, że $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k$. Implikacja odwrotna też ma miejsce.

Twierdzenie 1. *Następujące warunki są równoważne dla skończenie wymiarowych podprzestrzeni V_1, V_2 przestrzeni V :*

a) podprzestrzenie te są niezależne;

b) $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$;

c) $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.

Dowód. a) $\Rightarrow$ b). Jeśli $\mathbf{v} \in V_1 \cap V_2$, to $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ dla $\mathbf{v}_1 := \mathbf{v} \in V_1$ i $\mathbf{v}_2 := -\mathbf{v} \in V_2$, skąd (wobec a)) $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, tzn. $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

b)$\Rightarrow$a) Jeśli $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ i $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$, to $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 \in V_1 \cap V_2$. Przy założeniu b) mamy więc $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$.

Równoważność b)$\Leftrightarrow$c) wynika z równości Grassmana z p.1. $\square$

Uwaga 1. Gdy podprzestrzenie U i W są niezależne i $\mathbf{u}_1, ...\mathbf{u}_k$ jest bazą w U, a $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l$ bazą w W, to $\mathbf{u}_1, .., \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_l$ jest bazą w $U + W$. (Nietrudno tego dowieść wprost, lecz jeszcze łatwiej jest zauważyć, że ostatni układ rozpina $U + W$ i liczy tyle wektorów, ile wynosi $\dim(U + W)$.)

Definicja. Jeśli $V = V_1 \oplus V_2$, to o każdej z przestrzeni V_1, V_2 mówimy, że jest **(algebraicznym) dopełnieniem** drugiej.

Dana podprzestrzeń może mieć wiele dopełnień, np. gdy $V = \mathbb{R}^2$ i $V_1 = \mathbb{R}\mathbf{e}_1$, to każda różna od V_1 jedno-wymiarowa podprzestrzeń $V_2 \subset \mathbb{R}^2$ jest dopełnieniem V_1. Czasem istotne jest, by wybrać szczególne dopełnienie; nierzadko jednak wystarcza

Twierdzenie 2. *Każda podprzestrzeń przestrzeni V ma dopełnienie algebraiczne.*

Dowód. Rozpatrzymy tylko przypadek, gdy $\dim(V) < \infty$. Rozszerzmy pewną bazę A_1 rozważnej podprzestrzeni V_1 do bazy $A_1 \cup A_2$ przestrzeni V. Niech $V_2 := \text{lin}(A_2)$. Z definicji bazy, $\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(V)$, a z definicji sumy algebraicznej, $V_1 + V_2 \supset \text{lin}(A_1 \cup A_2) = V$. Zatem $V = V_1 \oplus V_2$ na mocy twierdzenia 1. $\square$

Twierdzenie 1 rozszerzyć można na przypadek większej liczby podprzestrzeni.

Twierdzenie 3. * *Następujące warunki są równoważne dla skończenie wymiarowych podprzestrzeni $V_1, ..., V_k$ przestrzeni wektorowej V :*

a) podprzestrzenie te są niezależne;

b) $V_i \cap \sum_{j<i} V_j = \{\mathbf{0}\}$ dla $i = 2, ..., k$;

c) $\dim(V_1 + ... + V_k) = \dim V_1 + ... + \dim V_k$;

d) $V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = \{\mathbf{0}\}$ dla $i = 1, ..., k$.

Dowód. a) $\Rightarrow$ b). Jeśli $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_{i-1}$ dla pewnych wektorów $\mathbf{v}_j \in V_j$, to $\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i + \mathbf{0} + ... + \mathbf{0}$, skąd wobec a) mamy $\mathbf{v}_1 = ... = \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

b) $\Rightarrow$ c). Przy założeniu b) otrzymujemy z twierdzenia 1 z p.1: $\dim(V_1+...+V_i) = \dim(V_1+...+V_{i-1})+\dim(V_i)$, skąd indukcyjnie $\dim(V_1+...+V_i) = \dim V_1+...+\dim V_i$ $(i = 1,...,k)$. Dla $i = k$ daje to warunek c).

c) $\Rightarrow$ d). Niech $W_i = \sum_{j\neq i} V_j$. Wobec wyników z p.1, $\dim W_i \leq \sum_{j\neq i}\dim V_j$ i $\dim(V_1 + ... + V_k) = \dim W_i + \dim V_i - \dim(V_i \cap W_i)$. Jeśli więc zachodzi c), to $\dim(V_i \cap W_i) = 0$.

d) $\Rightarrow$ a). Niech $\sum_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, gdzie $\mathbf{v}_i \in V_i$ dla $i = 1,...,k$. Jeśli spełniony jest warunek d), to przestrzenie V_1 i $V_2 + ... + V_k$ są niezależne, patrz twierdzenie 1, skąd $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Tak samo, $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ dla $i > 1$. $\square$

Zadania uzupełniające.

1. Dowieść, że gdy $U \oplus W = U \oplus W'$ i $W \subset W'$, to $W = W'$.
2. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V, a V_i' będzie dopełnieniem algebraicznym podprzestrzeni $V_1 \cap V_2$ w V_i. Dowieść, że $V_1 + V_2 = (V_1 \cap V_2) \oplus V_1' \oplus V_2'$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 17 w §II.1.2.

3. Rzuty liniowe.

Niech przestrzeń wektorowa V będzie sumą prostą swych podprzestrzeni U, W. Wówczas każdy wektor $\mathbf{v} \in V$ można przedstawić w postaci $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, gdzie $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$, i przedstawienie takie jest jedyne. Wektor $\mathbf{u}$ nazywamy **rzutem wektora v na** U **wzdłuż** W. Ponieważ $U \subset V$, więc przyporządkowując każdemu wektorowi $\mathbf{v} \in V$ jego rzut na U definiujemy przekształcenie $P : V \to V$, które nazwiemy **operatorem rzutu** (lub **rzutem** [2]) przestrzeni V **na** U **wzdłuż** W.

Pokażemy, że przekształcenie to jest liniowe. Istotnie, jeśli $c \in \mathbb{F}$ i $\mathbf{v} = \mathbf{u}+\mathbf{w}$, gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{w}$ są jak wyżej, to $c\mathbf{v} = c\mathbf{u} + c\mathbf{w}$, gdzie $c\mathbf{u} \in U$ i $c\mathbf{w} \in W$, skąd $P(c\mathbf{v}) = c\mathbf{u} = cP(\mathbf{v})$. Podobnie, $P(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = P(\mathbf{v}_1) + P(\mathbf{v}_2)$ dla $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

Zadanie 1. a) $\ker(P) = W$ i $\operatorname{im}(P) = U = \{\mathbf{v} \in V : P(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\}$.

b) P jest jedynym przekształceniem liniowym $V \to V$, takim, że $P(W) = \{\mathbf{0}\}$ i $P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ dla $\mathbf{u} \in U$.

Ogólniej, **rzutem sumy prostej** $V = \oplus_{s=1}^k V_s$ **na składnik** V_i nazywamy przekształcenie $P_i : \oplus_{s=1}^k V_s \to V$, które każdemu wektorowi $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k$, gdzie $\mathbf{v}_s \in V_s$ dla $s = 1,...,k$, przyporządkowuje wektor $\mathbf{v}_i$. Jak dla $k = 2$, rzut ten jest liniowy.

Zadanie 2. Przy tych oznaczeniach, $\sum_s P_s = I_V$, $P_i^2 = P_i$ i $P_iP_j = 0$ $(i \neq j)$.

Uwaga 1. W zadaniu, jak i niżej, pominięto znak złożenia: PQ oznacza $P \circ Q$ itp.

[2] użycie słowa „rzut” jest więc dwuznaczne: rzutem na U wzdłuż W nazywamy pewne przekształcenie P, a także obraz wektora przy tym przekszałceniu. Nie prowadzi to jednak do nieporozumień.

Twierdzenie 1. *Dla $P_1, ..., P_k \in \mathcal{L}(V, V)$ i $V_i := \mathrm{im}(P_i)$, równoważne są warunki:*
i) $V = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ i P_i jest rzutem tej sumy prostej na składnik V_i, dla $i = 1, ..., k$.
ii) $P_1 + ... + P_k = I$ i $P_iP_j = 0$ dla $i \neq j$ $(i, j = 1, ..., k)$.

Dowód. Implikacja *i)* $\Rightarrow$ *ii)* wynika z zadania 2. Dla dowodu implikacji odwrotnej załóżmy, że zachodzi ii). Wtedy $\mathbf{v} = \sum_i P_i(\mathbf{v}) \in \sum_{i=1}^k V_i$ dla wszystkich dla $\mathbf{v} \in V$ (bo $P_i(\mathbf{v}) \in \mathrm{im}(P_i) = V_i$). Pozostaje dowieść, że gdy $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k$, gdzie $\mathbf{v}_1 \in V_1, ..., \mathbf{v}_k \in V_k$, to $\mathbf{v}_i = P_i(\mathbf{v})$ dla $i = 1, ..., k$. Wyniknie stąd bowiem zarówno, że suma $\sum_{i=1}^k V_i$ jest prosta, jak i to, że P_i jest żądanym rzutem.

W tym celu zauważmy, że skoro $\mathbf{v}_i \in V_i = \mathrm{im}(P_i)$, to $\mathbf{v}_i = P_i(\mathbf{w}_i)$, gdzie $\mathbf{w}_i \in V$, skąd $P_1(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^k P_1P_j(\mathbf{w}_j)$. A że $P_1P_j = 0$ $(j \neq 1)$ i

$$P_1^2 = P_1(I - P_2 - ... - P_k) = P_1 - \sum_{j=2}^k P_1P_j = P_1$$

więc $P_1(\mathbf{v}) = P_1(\mathbf{w}_1) = \mathbf{v}_1$. Ta samo, $P_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_i$ dla pozostałych i. □

Definicja. Przekształcenie $P \in \mathcal{L}(V, V)$ nazywamy **rzutem (liniowym)** przestrzeni V, jeśli istnieje rozkład $V = U \oplus W$ taki, że P jest rzutem na składnik U.

Wniosek 1. *Przekształcenie $P \in \mathcal{L}(V, V)$ jest rzutem wtedy i tylko wtedy, gdy jest* **idempotentne**, *tzn. $P^2 = P$.*

Dowód. Jeśli $P^2 = P$, to przy $Q = I - P$ zachodzi $PQ = P(I - P) = P - P^2 = 0$ i tak samo $QP = 0$, wobec czego $V = P(V) \oplus Q(V)$ i P jest rzutem przestrzeni V na składnik $P(V)$ tej sumy prostej. Odwrotna implikacja wynika z zadania 2. □

Zadanie 3. Jeśli spełnione są warunki (i) twierdzenia, to $P_A := \sum_{i \in A} P_i$ jest dla każdego zbioru $A \subset \{1, ..., k\}$ rzutem na $\oplus_{i \in A} V_i$ wzdłuż $\oplus_{i \notin A} V_i$.

Zadanie 4. Niech $L : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, niech V' będzie dopełnieniem algebraicznym podprzestrzeni $\ker(L)$ i niech P będzie rzutem V na V' wzdłuż $\ker(L)$. Wówczas $K := L|V' \to \mathrm{im}(L)$ jest izomorfizmem liniowym oraz $L = KP$. (Tak więc każde przekształcenie liniowe jest złożeniem rzutu liniowego z izomorfizmem obrazu tego rzutu na obraz przekształcenia.)

Zadania uzupełniające. *

1. Niech $L \in \mathcal{L}(V, W)$ i $K \in \mathcal{L}(W, V)$. Udowodnić, że:
   a) Jeśli $LKL = L$, to KL i LK są rzutami, z jądrem $\ker(L)$ i obrazem $\mathrm{im}(L)$, odp.
   b) równość $KL = I_V$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy L jest przekształceniem różnowartościowym, a LK jest rzutem W na $\mathrm{im}(L)$.

2. Niech P i Q będą przemiennymi (tzn. spełniającymi warunek $PQ = QP$) rzutami w przestrzeni V. Dowieść, że PQ jest rzutem na $\mathrm{im}(P) \cap \mathrm{im}(Q)$ wzduż $\ker(P) + \ker(Q)$; ponadto, ostatnia suma jest prosta wtedy i tylko wtedy, gdy $PQ = 0$.

Zadania ze zbioru Kostrykina: 18,19,21 z §II.1.2, 6 z §II.1.3 i 17 z §II.3.1.

4. * **Sumy proste odwzorowań i zewnętrzne sumy proste.**

Niech $V = \oplus_{i=1}^k V_i$ oraz $W = \oplus_{i=1}^k W_i$ i niech $L_i \in \mathcal{L}(V_i, W_i)$ dla $i = 1, ..., k$. Wówczas $\mathbf{v}_1 + ... + \mathbf{v}_k \mapsto L_1(\mathbf{v}_1) + ... + L(\mathbf{v}_k)$, gdzie $\mathbf{v}_i \in V_i\ \forall i$, zadaje przekształcenie $L : V \to W$, które będziemy też oznaczać przez $\oplus_{i=1}^k L_i$ i nazywać **sumą prostą** przekształceń L_i. Wielokrotnie będziemy starali się zrozumieć własności zadanego przekształcenia liniowego przedstawiając je w postaci sumy prostej „prostszych" przekształceń. Zauważmy, że $Q_j L = L P_j$ dla $j = 1, ..., k$, a także $L(\mathbf{v}) = \sum_i L_i P_i(\mathbf{v})$ dla $\mathbf{v} \in V$, gdzie $P_j : V \to V_j$ i $Q_j : W \to W_j$ to rzutowania sum prostych na składniki. Wynika stąd, że $L \in \mathcal{L}(V, W)$, a gdy L_i jest izomorfizmem dla każdego i, to i L jest izomorfizmem, przy czym $L^{-1} = \oplus_{i=1}^k L_i^{-1}$.

Przykład 1. Niech $V = U \oplus W$. Wówczas $I_U \oplus 0_W$, gdzie $0_W : W \to W$ to przekształcenie zerowe, jest rzutem V na U wzduż W. Natomiast przekształcenie $S = I_U \oplus (-I_W)$ nazywamy **symetrią** przestrzeni V **względem** U **wzdłuż** W. (Równoważna definicja S jest więc następująca: $S(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ dla $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$.)

Zadanie 1. Niech $\mathcal{V}$ będzie bazą przestrzeni $V = U \oplus W$ z uwagi 1 w p.2. Znaleźć macierze w bazach $\mathcal{V}, \mathcal{V}$ rzutu na U wzdłuż W i symetrii względem U wzdłuż W.

Przykład 2. Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi, niech V_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni V i niech $L_0 \in \mathcal{L}(V_0, W)$ będzie zanurzeniem. Wykorzystując sumy proste pokażemy, że jeśli $\dim(V) \leq \dim(W) < \infty$, to L_0 można przedłużyć do zanurzenia $L \in \mathcal{L}(V, W)$. W tym celu wystarcza obrać podprzestrzenie V_1 i W_1, takie, że $V_0 \oplus V_1 = V$ i $L_0(V_0) \oplus W_1 = W$, i przyjąć $L := L_0 \oplus L_1$, gdzie $L_1 \in \mathcal{L}(V_1, W_1)$ jest zanurzeniem. Zanurzenie L_1 istnieje, bo $\dim W_1 = \dim W - \dim(L_0(V_0)) = \dim W - \dim V_0$ i $\dim V_1 = \dim V - \dim V_0$, skąd $\dim V_1 \leq \dim W_1$. $\square$

Uwaga 1. * Niech $V = V_1 \oplus V_2$ i niech P_i będzie rzutem na V_i wzdluż V_j $(i, j = 1, 2, i \neq j)$. Niech dalej $V' := V_1 \times V_2$, a $P'_i : V' \to V_i$ niech będą zadane wzorami $P'_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \mathbf{v}_1$ oraz $P'_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \mathbf{v}_2$. Odwzorowanie $L : V' \to V$, zadane przez $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, jest izomorfizmem i $P'_i = P_i L$ dla $i = 1, 2$. Z tego względu przestrzeń V' nazywana bywa **zewnętrzną sumą prostą** przestrzeni V_1, V_2; jest ona izomorficzna z sumą prostą V tych przestrzeni, i to tak, że „zachowane" są rzutowania (w tym sensie, że rzutom P_i sumy prostej odpowiadają przy izomorfizmie rzuty P'_i sumy zewnętrznej, jak wyjaśniono wyżej). Również dla $k > 2$ i przestrzeni $V_1, ..., V_k$ niekoniecznie będących podprzestrzeniami wspólnej przestrzeni V, iloczyn kartezjański $V_1 \times ... \times V_k$ nazywany jest ich zewnętrzną sumą prostą i oznaczany $\oplus_{i=1}^k V_i$.

Zadania uzupełniające.

1. Niech w ciele skalarów $\mathbb{F}$ spełniony będzie warunek $1_\mathbb{F} + 1_\mathbb{F} \neq 0_\mathbb{F}$ Dowieść, że gdy $S \in \mathcal{L}(V,V)$ i $S^2 = I$, to S jest symetrią przestrzeni V, względem $U := \{\mathbf{u} \in V : S(\mathbf{u}) = \mathbf{u}\}$ i wzdłuż $W := \{\mathbf{w} \in V : S(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}\}$. (Wskazówka: dowieść, że $P := \frac{1}{2}(I+S)$ jest rzutem na U wzdłuż W.)

2. Niech V_1, V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V, a W_1, W_2 – przestrzeni W, przy czym $\dim V < \infty$. Dowieść równoważności warunków:
a) istnieje izomorfizm $L : V \to W$ taki, że $L(V_i) = W_i$ dla $i = 1,2$;
b) $\dim V = \dim W$, $\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(W_1 \cap W_2)$ i $\dim V_i = \dim W_i$ dla $i = 1,2$.
(Wskazówka: gdy $V = V_1 + V_2$ zastosować zad. uz. 2 z p.2.)

§ 7. Możliwe tematy kolokwialne.

„Możliwe" są wszystkie omówione na wykładzie tematy, lecz szczególnie dobrze jest upewnić się co do znajomości następującego materiału:

a) pojęcia wstępne i przykłady z §1, dotyczące przestrzeni wektorowych i przekształceń liniowych;

b) definicja i przykłady baz w przestrzeniach wektorowych, mapa wyznaczona przez bazę uporządkowaną, wymiar (§2);

c) znaczenie baz dla opisu przekształceń liniowych, w tym własności przyporządkowania przekształceniu jego macierzy względem zadanych baz, jak również zmiana tych macierzy przy zmianie bazy (§3);

d) bazy a liniowa niezależność i generowanie, własności tych pojęć (włączając powłokę liniową), lemat o wymianie i jego konsekwencje (§4.1-4.3);

e) badanie podprzestrzeni przestrzeni współrzędnych (§4.5);

f) definicje i twierdzenia dotyczące rzędu, w tym przede wszystkim twierdzenia z §5.1, §5.2 i §5.3 (dwa) i konsekwencje tych twierdzeń (wnioski w §5.1 i w §5.2);

g) twierdzenie Kroneckera–Capellego (§5.4);

h) równość Grassmana i wnioski (§6.1), sumy proste, charakteryzacja niezależności podprzestrzeni i istnienie dopełnienia algebraicznego (§6.2), rzuty sumy prostej na składniki i charakteryzacja rzutów liniowych (§6.3).

Do należytego operowania omawianymi pojęciami potrzebne jest zrozumienie dowodów najważniejszych wyników. Dlatego niektóre zadania na kolokwium mogą dotyczyć sformułowań definicji czy twierdzeń, a także dowodów tych ostatnich.